

# Eventos y Conferencias

## 2007 T<sup>3</sup> International Conference

March 9-11, 2007

[http://education.ti.com/educationportal/sites/US/nonProductMulti/pd\\_conferences\\_chicago.html](http://education.ti.com/educationportal/sites/US/nonProductMulti/pd_conferences_chicago.html)

## RELME 21

### 21 REUNIÓN LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

22 al 26 de Julio de 2007

<http://mailinf.reduc.edu.cu/Redirect/www.relme-clame.org>

<http://www.relme-clame.org>

## XII CIAEM

### XII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN

#### MATEMÁTICA

15 al 18 de Julio de 2007. <http://www.convention-center.net/ciaem>

## IX Simposio de Educación Matemática. (SEM)

Chivilcoy, Argentina

7 al 10 de mayo de 2007. <http://www.edumat.org.ar>

## 5th CERME Conference

22 al 26 febrero 2007. <http://www.cyprusisland.com/cerme/>

## VII Seminario Nacional de Historia de Matemática.

1 al 4 abril 2007. <http://www.sbhmat.com.br>

## V Conferencia Internacional de Matemática y Diseño

01 al 04 Julio 2007. [www.maydi.org.ar](http://www.maydi.org.ar)

## International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications - ICTMA

13. 23 a 27 Julio 2007. [ictma13@ku.edu.np](mailto:ictma13@ku.edu.np)

## XIX Encuentro Nacional y V Internacional de Investigadores en Educación ENIN2007

Santiago, Chile. Noviembre 2007. <http://www.cpeip.cl>

## Fifth European Congress of Mathematics

Amsterdam, Holanda. <http://www.emis.de/conf/emsconfs.html>

## XVII COLOQUIO LATINOAMERICANO DE ÁLGEBRA

Medellín, Colombia. 23 al 27 de julio 2007.

<http://altenua.udea.edu.co/~claxvii/>

## X International Workshop on Differential Equations, Number Theory, Data Analysis Methods and Geometry.

University of Havana, Cuba. February 19-23, 2007.

<http://www.crm.umontreal.ca/~physmath/home.dir/HAVANA2007.dir/index.html>

## VI Congreso Venezolano de Educación Matemática.

08 al 11 de octubre de 2007. Maracay.

<http://www.relme-clame.org/contenido/noticias.php#vicvem>

## V Conferencia Internacional de Matemática y Diseño M&D 2007.

Blumenau (SC). Brasil del 1 al 4 de julio de 2007.

[www.maydi.org.ar](http://www.maydi.org.ar)

## XXII Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines.

26, 27 y 28 de septiembre de 2007. Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza.

[jornadas2007@fcmail.uncu.edu.ar](mailto:jornadas2007@fcmail.uncu.edu.ar)

# Sitios de Interés en Internet

1. Excelente página con información detallada y un concurrido foro de preguntas y soluciones. Grupo de discusión sobre programas de matemática e ingeniería para las calculadoras TI-89 Titanium y Voyage 200. <http://www.calculadoras.cl/>
2. En la siguiente página podrán encontrar una variedad de novedosos y actuales programas para calculadoras TI. <http://www.ticalc.org/>
3. Acá encontrarán programas, podrán bajar emulador para las calculadoras, accesorios, información sobre los cables link, foro, etc. (la página se encuentra en francés) <http://www.alvasoft.net/texas-programmes-et-cours-a-telecharger-pour-ti89-ti92-et-voyage200-23-1.html>
4. Manual y programas para la TI-83 <http://www.wku.edu/~david.neal/manual/ti83.html>
5. Página sobre la TI-89 con programas, juegos, emulador, librerías para juegos, instrucciones para cable link, enlaces, etc. <http://membres.lycos.fr/xopti89/>
6. Página muy completa en donde se analiza el uso de las calculadoras. <http://www.telefonica.net/web2/nou/calculaweb/>
7. Materiales interactivos para el aprendizaje de la Geometría con la utilización del programa Cabri-Géomètre II. Enlaces: geometría interactiva, calculadoras, calculadoras gráficas. <http://www.terra.es/personal/joseantm/>
8. La información de Matemática está clasificada en artículos y actividades (actividades con Cabri, calculadoras gráficas - contiene una guía rápida de la calculadora TI-83, actividades para un rincón matemático), [http://www.mismates.net/modules.php?name=Content&pa=list\\_pages\\_categories&cid=127](http://www.mismates.net/modules.php?name=Content&pa=list_pages_categories&cid=127)
9. Página personal de Jimmy Rueda E. para las calculadoras Texas Instruments TI-89, TI-89 Titanium, TI-92 Plus y Voyage 200 <http://www.geocities.com/tiespjar/tiespjar.htm>
10. Actividades con calculadoras gráficas y simbólicas <http://www.mismates.net/matematicas/actividades.htm#calculadora>

8va. Edición - 2007

## En esta edición

<b>Estudio del movimiento de proyectiles</b>	
<i>R. Alvarado Ortega</i> .....	1
<b>Editorial</b> .....	2
<b>¡Una Calculadora o un Recolector de datos GRATIS!</b> .....	2
<b>Estudio del movimiento de proyectiles</b> .....	3
<b>Explorando medias con la Voyage™ 200</b>	
<i>Juanita Contreras S y Claudio del Pino O</i> .....	7
<b>La función exponencial y la multiplicación de bacterias</b>	
<i>Mauricio Bustos Bravo</i> .....	9
<b>Calculadoras Texas Instruments en el sistema de préstamos de biblioteca</b>	
<i>Fabiola Albornoz Bulnes</i> .....	11
<b>Método de Exhaustión y Sumas de Riemann: Una introducción a la Integral Definida Con Voyage 200</b>	
<i>Eugenio Chandía</i> .....	12
<b>Conservación de energías en un péndulo simple</b>	
<i>Víctor Garrido Castro</i> .....	14
<b>Dando contexto al baricentro: las curvas de Bézier</b>	
<i>Roberto Reinoso Bascañan</i> .....	16
<b>Conozca el editor</b> .....	19
<b>Eventos y conferencias</b> .....	20

# Estudio del movimiento de proyectiles

R. Alvarado Ortega - [roalvarado@itcr.ac.cr](mailto:roalvarado@itcr.ac.cr)

El estudio del movimiento de un proyectil en el aire puede verse desde diferentes puntos de vista. Tradicionalmente se trata la relación distancia horizontal versus tiempo y altura versus tiempo. Sin embargo, se pueden explorar otras relaciones como ángulo de disparo y tiempo de vuelo, ángulo de disparo y alcance máximo horizontal, ángulo de disparo y altura máxima. Con ayuda de una calculadora simbólica graficadora (TI – 92, TI – 92 plus o Voyage 200) se puede simular dicho movimiento y determinar tales relaciones utilizando regresiones cuadráticas.

## 1. Introducción

El movimiento de proyectiles es una combinación de un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) en el eje horizontal, y un movimiento con aceleración constante en el eje vertical. Por ello, son válidas las ecuaciones de MRU y las de caída libre.

Las ecuaciones básicas son:

$$X = V_0 \cdot \cos(\theta) \cdot t \quad (1.1)$$

$$Y = Y_0 \cdot \sin(\theta) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (1.2)$$

donde:

$V_0$  = rapidez inicial.

$\theta$  = ángulo de disparo.

$t$  = tiempo.

$Y$  = altura alcanzada.

$Y_0$  = altura inicial.

$X$  = alcance horizontal,

$g$  = aceleración gravitacional. (9.8m/s<sup>2</sup>)

La forma parabólica del movimiento es determinada por la relación entre la altura y el alcance horizontal:

$$Y = X \tan(\theta) - \frac{g \sec^2(\theta)}{(2V_0^2)} X^2$$

Es frecuente estudiar la relación de las distancias horizontal y vertical, en función del tiempo, en donde éste, siempre se presenta como variable independiente. Es claro que las relaciones son: lineal (x versus t) y parabólica (y versus t).

En el caso de la relación del ángulo de disparo del proyectil con otros parámetros, se deduce que existe una relación causa – efecto, en donde la variación del ángulo (causa) determina el valor de: el tiempo que dura el proyectil en el aire, la distancia a la que cae y la altura máxima que alcanza (efecto). Este comportamiento es independiente de la magnitud de la velocidad inicial.

Despreciando los efectos de fricción con el aire, e imponiendo las condiciones iniciales en las ecuaciones (1.1) y (1.2):

si  $t = t_v$  (tiempo de vuelo) entonces:

$X = R$  (alcance máximo horizontal);

$Y = O$  (altura final)

Se llega a:

$$R = V_0 \cdot \cos(\theta) \cdot t_v \quad (2.1)$$

$$O = Y_0 + V_0 \cdot \sin(\theta) \cdot t_v + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_v^2 \quad (2.2)$$

Continúa en la página 3

Estimados profesores y lectores de Latinoamérica,

Nos complace presentar la octava edición de la revista Innovaciones Educativas, cuyo principal papel es compartir experiencias en el uso de la tecnología portable en la enseñanza-aprendizaje de la matemática y las ciencias.

A modo de reflexión, hoy en día nuestros estudiantes están viviendo en un mundo cada vez más digitalizado, donde la manipulación de equipos portátiles con pantallas y teclas es algo cotidiano para ellos. Es misión de los profesores aprovechar la tecnología y la habilidad e interés que muestran los jóvenes en su uso, para hacer más atractivo y eficiente el proceso de enseñar y aprender.

La metodología y la didáctica de enseñar debe ir a la par con los avances tecnológicos, en la actualidad y con las herramientas que disponemos no podemos concebir una clase basada en la memorización y la mecanización de rutinas. La tecnología educativa nos permite analizar de manera interdisciplinaria problemas reales, logrando una globalización de la enseñanza, profundización de conceptos y un aprendizaje significativo basado en el concepto de descubrimiento (ensayo y error). Dichos argumentos invitan al educador a actualizarse e involucrarse en el proceso de innovación, inserto en las nuevas políticas educativas.

En esta edición incluimos artículos y actividades de aula sobre el estudio del movimiento de proyectiles, función exponencial y el crecimiento de bacterias, Método de exhaución y uso del APPS "Calculus Tools," un laboratorio de conservación de energía en un péndulo simple, las curvas de Bézier en Cabri Geometry, también podrá explorar las medias aritméticas, geométricas, etc. en varios contextos e incluso demostrar la validez de conjeturas en la voyage 200 y leer sobre una experiencia de préstamos de calculadoras en bibliotecas.

Aprovechamos esta tribuna para invitarles al desafío permanente de aplicar tecnología en el aula para beneficio de nuestros estudiantes.

## Consejo Editorial

Dr. EDISON DE FARIA CAMPOS  
Universidad de Costa Rica  
[edefaria@cariari.urc.ac.cr](mailto:edefaria@cariari.urc.ac.cr)

Lic. MARCO ANTONIO BARRALES VENEGAS  
Colegio Alemán de Concepción  
Universidad San Sebastián. Concepción, Chile  
[mbarrale@dsc.cl](mailto:mbarrale@dsc.cl)

Prof. MARÍA DEL PILAR MORFIN HERAS  
Universidad de Guadalajara, Mexico.  
[pilarmorfin@yahoo.com](mailto:pilarmorfin@yahoo.com)

Dr. JUAN MELÍN CONEJEROS  
Texas Instruments Inc.  
Málaga 115, Of. 904. Las Condes. Santiago, Chile.  
[jmelin@ti.com](mailto:jmelin@ti.com)

Nota: Si tiene una actividad o artículo que quiera compartir y publicar en esta revista, contacte a uno de los editores.

## ¡Una Calculadora o un Recolector de datos GRATIS\*!



**Ayude a otros profesores a incorporar la tecnología a sus clases. Envíe un artículo a nuestros editores y si es publicado recibirá una calculadora de su elección o un recolector de datos ¡gratis!**

### Perfil de los Artículos o Actividades

Se intenta publicar artículos o actividades que:

- despierten la curiosidad por la tecnología.
- presenten una novedad de cómo resolver un problema.
- el profesor perciba las ventajas de resolver algo con la calculadora.
- motiven al profesor a comenzar a utilizar la tecnología en sus clases.
- presenten una forma inteligente, creativa, amistosa de cómo resolver un problema utilizando las herramientas de Texas Instruments.

### ¿Cómo me deben de enviar Artículos o Actividades de los autores?

- Los trabajos se reciben por correo electrónico en un archivo Word en fuente Arial de 12 puntos.
  - Tamaño de no más de 3 páginas tamaño carta, salvo excepciones.
  - Debe tener un párrafo de introducción.
  - Las pantallitas, gráficas o fotografías se solicitan en archivos separados. Las pantallitas se necesitan en formato tif con un mínimo de 400 dpi. Las gráficas en formato jpeg o gif y las fotografías deben de ser en alta resolución en formato eps o jpeg.
- \* Una calculadora o recolector de datos (CBR 2™ o CBL 2™) por artículo.

Para un disparo desde el suelo ( $Y_0 = 0$ ), se pueden encontrar las siguientes relaciones:

$$t_v = \frac{2V_0 \sin(\theta)}{g} \quad (3.1)$$

$$R = \frac{V_0^2 \sin(2\theta)}{g} \quad (3.2)$$

$$Y_{max} = \frac{V_0^2 \sin^2(\theta)}{2g} \quad (3.3)$$

Estas ecuaciones indican que en cada relación existe un cierto grado de complejidad. La manera más práctica de vencer este obstáculo, es realizar ajustes por mínimos cuadrados de los datos tabulados, en donde la variable independiente es el ángulo de disparo (no el tiempo, como es tradición).

Recordando que las funciones trigonométricas pueden ser expandidas en series de potencias, se tiene:

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (4.1)$$

Así:

$$\sin(2\theta) = 2\theta - \frac{2^3 \theta^3}{3!} + \frac{2^5 \theta^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n 2^{2n+1} \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (4.2)$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{2\theta^2}{2!} - \frac{2^3 \theta^4}{4!} + \frac{2^5 \theta^6}{6!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} \theta^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (4.3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4) en las (3) se encuentra que:

$$t_v = \frac{2V_0}{g} \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) \quad (5.1)$$

$$R = \frac{V_0^2}{g} \left( 2\theta - \frac{2^3 \theta^3}{3!} + \frac{2^5 \theta^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n 2^{2n+1} \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) \quad (5.2)$$

$$Y_{max} = \frac{V_0^2}{2g} \left( \frac{2\theta^2}{2!} - \frac{2^3 \theta^4}{4!} + \frac{2^5 \theta^6}{6!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} \theta^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) \quad (5.3)$$

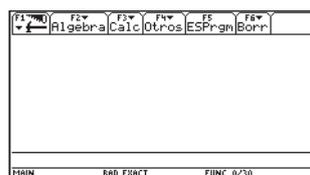
Evidentemente, las soluciones de las ecuaciones (5), dependen de la cota superior de la serie, que está en relación directa con el grado de exactitud y precisión deseadas, las cuales a su vez, son determinadas por los coeficientes de determinación y de correlación correspondientes.

En la sección 2 se hace una descripción detallada del procedimiento, en la sección 3 se presenta la discusión de los resultados y las conclusiones se incluyen en la sección 4.

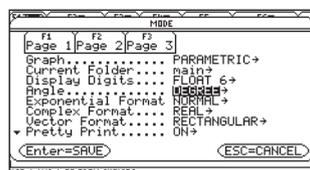
## 2. Procedimiento:

### I Parte Características básicas de un proyectil

- Encender la calculadora presionando la tecla [ON] y luego presionar [♦] Q para llegar a la pantalla principal (pantalla HOME)



- Presione [MODE], seleccione el tipo de gráfico PARAMÉTRICO, el ángulo en GRADOS y seleccione el tipo de gráfico FUNCION y presione [ENTER].



- Presionar [ENTER] para guardar la configuración.
- Con las teclas [♦] W se llega al editor de ecuaciones. Borre cualquier ecuación que se encuentre en el editor de ecuaciones marcando [F1] [8]. Coloque el cursor en la línea **xt1=**.

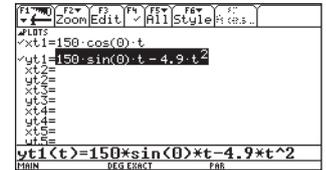
- Digite ahora lo siguiente:

**150 \* cos(θ)\*t** y presione

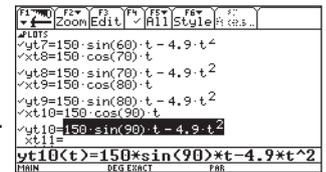
[ENTER]. Automáticamente pasará a la línea de edición de "y"; es decir, a **yt1 =**.

Digite **150 \* sin(θ)\*t - 4.9\*t^2** y

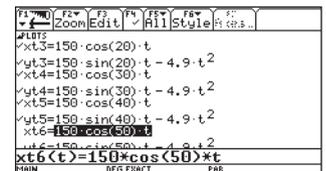
presione [ENTER]. Ya usted ha guardado la ecuación de un proyectil disparado con una rapidez de **150 m/s**, a un ángulo de **0°**.



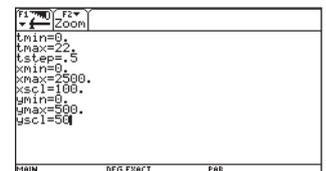
- Repita el punto anterior, aumentando los ángulos de 10 en 10 hasta llegar a los 90°.



- Note que la tecla [F4] presionada sobre alguna de las ecuaciones, permite marcar o desmarcar las mismas. Desmarque las ecuaciones en las cuales el ángulo sea mayor de 40°.

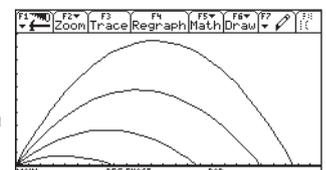


- Presione [♦] E para ir a la ventana del gráfico. Los valores que ahí aparecen, se refieren al tiempo t transcurrido desde el lanzamiento, al alcance horizontal X y a la altura Y. Digite en su calculadora los valores que aparecen en la siguiente pantalla:

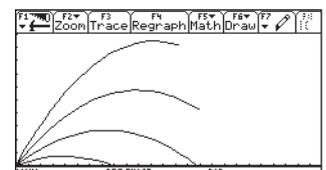
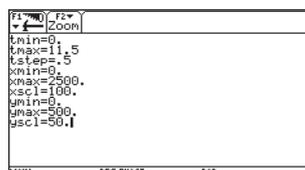


$t_{min} = 0$     $t_{max} = 22$     $t_{step} = 0.5$   
 $x_{min} = 0$     $x_{max} = 2500$     $x_{scl} = 100$   
 $y_{min} = 0$     $y_{max} = 500$     $y_{scl} = 50$

- Para ver los gráficos, presione [♦] R. Identifique cada uno de los gráficos. ¿Qué característica tiene cada uno? ¿Qué cree usted que ocurriría si en el punto anterior cambia a  $t_{max} = 11.5$  s?

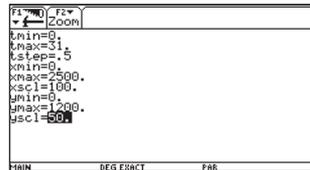


- Determine la validez de su respuesta, presionando [♦] E y cambie el valor de  $t_{max}$  a **11.5**. presione ahora [♦] R.



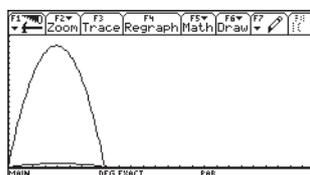
11. Identifique cada uno de los gráficos, y observe la posición final del proyectil. Para diferenciar cada gráfico, presione [♦] **W**, luego coloque el cursor sobre la ecuación que desea diferenciar (ya sea la correspondiente al eje X  $x(t) =$ , o al eje Y  $y(t) =$  y presione [F6], después seleccione cualquiera de las 8 opciones, digitando el número o presionando [ENTER] sobre la opción elegida).

12. Presione [♦] **E** para ir a la ventana del gráfico. Digite en su calculadora los valores que aparecen en la siguiente pantalla:

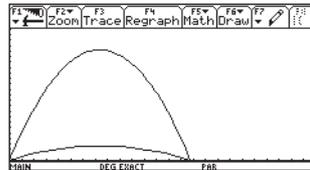


$t_{\min} = 0$      $t_{\max} = 31$      $t_{\text{step}} = 0.5$   
 $x_{\min} = 0$      $x_{\max} = 2500$      $x_{\text{scl}} = 100$   
 $y_{\min} = 0$      $y_{\max} = 1200$      $y_{\text{scl}} = 50$

13. Desmarque todos los gráficos, excepto los correspondientes a ángulos de  $10^\circ$  y  $80^\circ$ . Presione [♦] **R** [F2] 9. Identifique cada uno de los gráficos. ¿Qué característica los relaciona?



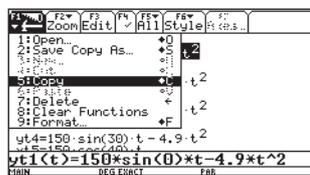
14. Repita el punto anterior, para los ángulos de  $20^\circ$  y  $70^\circ$ . ¿Qué característica los relaciona? ¿Ocurrirá lo mismo para otros ángulos?



## II Parte Relación entre el ángulo de disparo y el tiempo de vuelo.

1. Determine el tiempo de vuelo para un lanzamiento a  $0^\circ$ , de la siguiente manera:

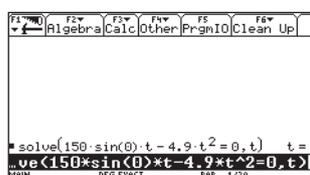
i. Presione [♦] **W** y coloque el cursor sobre la ecuación  $y1 = 150 \sin(\theta) t - 4.9t^2$ . Marque ahora [F1] 5 y luego [♦] **Q** para llegar a la pantalla principal.



ii. Presione [F2] 1. (para solucionar ecuaciones de cualquier grado).



iii. Presione [F1] 6, y digite seguidamente = 0, t). Presione [ENTER] para obtener el resultado.

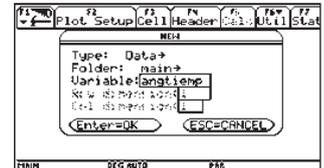


2. Repita el punto anterior, para cada uno de los ángulos, desde  $5^\circ$  hasta  $90^\circ$ .

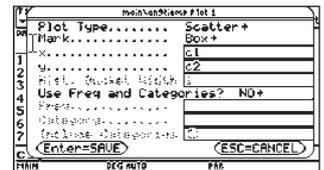
3. Con los datos anteriores complete una tabla de datos en su calculadora utilizando el siguiente procedimiento:

- Presione [APPS] [6] [3] seleccione **Type: Data**, **Folder: main**, **Variable: angtiemp**. [ENTER] [ENTER].
- Aparece la tabla de datos. Copie los valores de q en la columna C1, y los del tiempo de vuelo en la columna C2.

	C1	C2	C3	C4	C5
1	S1	2.67			
2	10	5.32			
3	15	7.92			
4	20	10.47			
5	25	12.94			
6	30	15.31			
7	35	17.56			



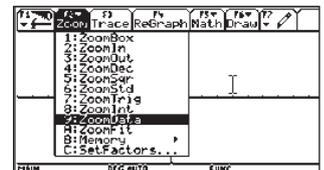
4. Presione ahora [F2] y llega a una pantalla en la que el cursor marca **Plot 1**. Con [F1] seleccione: **Plot Type: scatter**, **Mark: Plus**, **x: C1**, **y: C2**. [ENTER] y llega de nuevo a la tabla de datos.



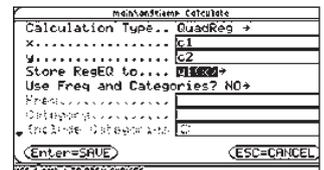
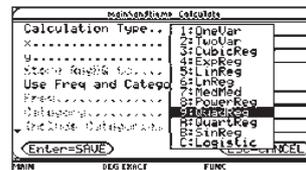
5. Presione [MODE], seleccione el tipo de gráfico **FUNCION** y presione [ENTER][ENTER].



6. Con [♦] **R** podrá ver el gráfico. Si no aparecen todos los puntos, presione [F2][9]. ¿Qué tipo de gráfico es? ¿Qué relación puede usted pronosticar?



7. Regrese a la tabla presionando [APPS][6][1]. Para realizar el ajuste correspondiente, presione [F5], **calculation Type: QuadReg** [ENTER], **x: C1**, **y: C2**; **Store RegEQ To**  $y1(x)$  [ENTER][ENTER].

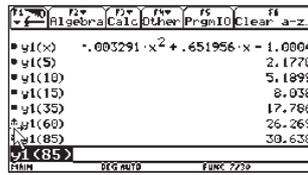
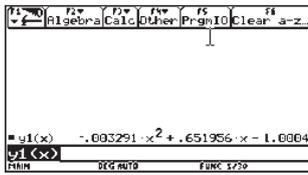


8. Ahora aparece el modelo que representa al tiempo de vuelo en función del ángulo de disparo, así como el coeficiente de determinación ( $r^2$ ). Calcule el coeficiente de correlación (r).



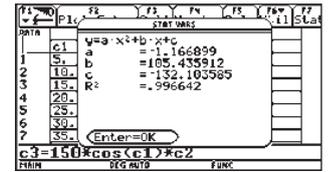
9. ¿Cumple este modelo con su pronóstico? Determine la validez de su modelo. Hágalo de la siguiente manera: presione [♦] **Q** para llegar a la pantalla principal (pantalla HOME). Luego, sobre la línea de edición digite  $y1(x)$  y

presione [ENTER]. Aparecerá el modelo obtenido. Sustituya la variable x por algunos de los datos y presione [ENTER] en cada caso.

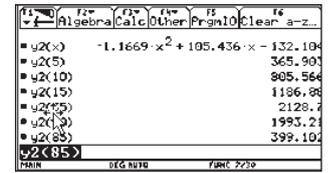
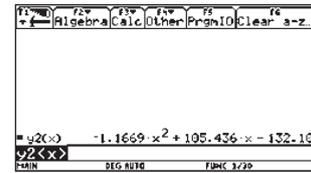


8. Presione de nuevo [ENTER].

Nuevamente aparece un modelo que representa el alcance máximo horizontal en función del ángulo de disparo, así como el coeficiente de determinación ( $r^2$ ). Calcule el coeficiente de correlación ( $r$ ).



9. ¿Cumple este modelo con su pronóstico? Determine la validez de su modelo. Hágalo de la siguiente manera: presione. [♦] Q para llegar a la pantalla principal (pantalla HOME). Luego, sobre la línea de edición digite  $y2(x)$  y presione [ENTER]. Aparecerá el modelo obtenido. Sustituya la variable x por algunos de los datos y presione [ENTER] en cada caso.



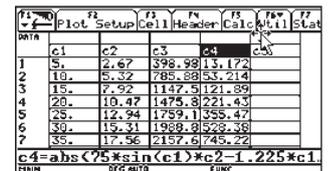
### IV Parte Relación entre el ángulo de disparo y La altura máxima.

1. Presione [♦] W para ir al editor de ecuaciones y con [F4], desmarque todos los PLOTS y las ecuaciones que puedan estar almacenadas.

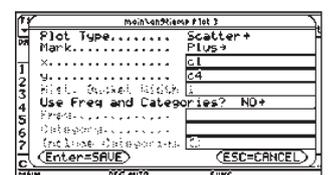
2. Regrese a la tabla de datos **angtiemp** presionando [APPS][6][1].

3. Coloque el cursor en la columna c4, justo sobre la casilla donde aparece c4. En la línea de edición debe aparecer:  $c4=$ . Presione [ENTER] y digite en la línea de edición:  $abs(75*\sin(c1)*c2 - 1.225*c1^2)$ . Vuelva a presionar [ENTER].

(Para la función abs (debe presionar [2nd][2][ENTER]). Espere un momento y en la columna c4 aparecerán los valores de la altura máxima.



Presione [F2] y coloque el cursor en **Plot 3**. Con [F1] seleccionar: **Plot Type:** scatter, **Mark:** Plus, x: c1, y: c4, [ENTER][ENTER] y llega de nuevo a la tabla de datos.



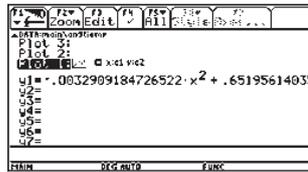
4. Con [♦] R podrá ver el gráfico. Si no aparecen todos los puntos, presione [F2][9]. ¿Qué tipo de gráfico es? ¿Qué relación puede usted pronosticar?

### III Parte Relación entre el ángulo de disparo y el Alcance máximo horizontal.

1. Presione [MODE], seleccione el tipo de gráfico **FUNCION**, el ángulo en **GRADOS** y presione [ENTER][ENTER].

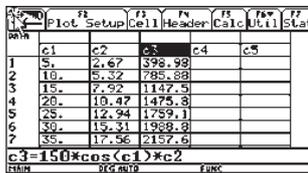
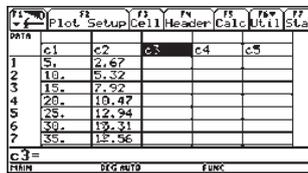


2. Presione [♦] W para ir al editor de ecuaciones y con [F4], desmarque todos los PLOTS y las ecuaciones que puedan estar almacenadas.

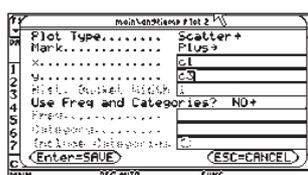


3. Abra la tabla de datos **angtiemp** presionando [APPS][6][1].

4. Coloque el cursor en la columna c3, justo sobre la casilla donde aparece c3. En la línea de edición debe aparecer:  $c3=$ . Ahora digite sobre esa línea:  $150*\cos(c1)*c2$  y presione [ENTER]. Espere un momento y en la columna c3 aparecerán los valores del alcance máximo horizontal.

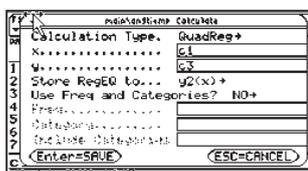


5. Presione [F2] y coloque el cursor en **Plot 2**. Con [F1] seleccionar: **Plot Type:** scatter, **Mark:** Plus, x: c1, y: c3, [ENTER][ENTER] y llega de nuevo a la tabla de datos.

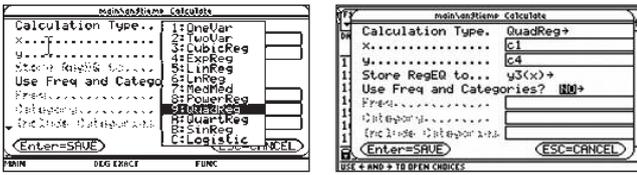


6. Con [♦] R podrá ver el gráfico. Si no aparecen todos los puntos, presione [F2][9]. ¿Qué tipo de gráfico es? ¿Qué relación puede usted pronosticar?.

7. Regrese a la tabla presionando [APPS][6][1]. Para realizar el ajuste correspondiente, presione [F5], **calculation Type:** QuadReg [ENTER], x: c1, y: c3: **Store RegEQ To**  $y2(x)$  [ENTER].



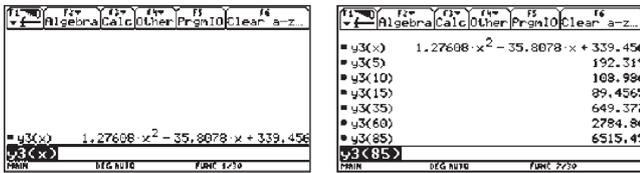
5. Regrese a la tabla presionando [APPS][6][1]. Para realizar el ajuste correspondiente, presione [F5], **calculation Type: QuadReg** [ENTER], **x: c1, y: c4: Store RegEQ To y3(x)** [ENTER][ENTER].



6. Presione de nuevo [ENTER]. Nuevamente aparece un modelo que representa la altura máxima en función del ángulo de disparo, así como el coeficiente de determinación ( $r^2$ ). Calcule el coeficiente de correlación ( $r$ ).



7. ¿Cumple este modelo con su pronóstico? Determine la validez de su modelo. Hágalo de la siguiente manera: presione. [♦] **Q** para llegar a la pantalla principal (pantalla **HOME**). Luego, sobre la línea de edición digite **y3(x)** y presione [ENTER]. Aparecerá el modelo obtenido. Sustituya la variable x por algunos de los datos y presione [ENTER] en cada caso.



**Parte I:** El mov. de un proyectil es de tipo parabólico, donde se tiene que el tiempo de vuelo ( $t_v$ ) es, justamente el tiempo transcurrido desde la salida del proyectil, hasta que éste regresa al suelo (caso  $Y_0 = 0$ ); cualquier otro  $t < t_v$  localiza al proyectil en algún punto de la trayectoria.

Por otro lado, se tiene que el alcance máximo horizontal aumenta con el ángulo, hasta los  $45^\circ$ , luego cambia la relación de forma tal que  $R$  va disminuyendo al incrementarse  $\theta$ . También hay que citar que ángulos complementarios (80 y 10), (70 y 20), (30 y 60),..., tienen el mismo alcance horizontal.

**Parte II:** El tiempo de vuelo puede relacionarse con el ángulo de disparo de manera cuadrática (ec. 6.1) o cúbica (6.2), sin embargo, se prefiere tomar (6.1) en virtud de que el coeficiente cúbico de (6.2) es prácticamente despreciable, mientras que la correlación en ambos casos es muy cercana a la unidad.

En ambos casos, el coeficiente cuadrático es negativo, por lo que la curva debe ser cóncava hacia abajo.

Lógicamente, al tomar más términos en (5.1), se tendrá mayor precisión y exactitud, pero también se aumenta el grado de complejidad. La diferencia entre coeficientes de correlación es del orden de 0.0003, lo cual no es significativo. Por ello es justificable acotar (5.1) al valor cuadrático.

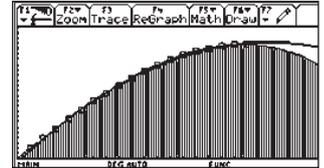
$$t_v = -0.003291\theta^2 + 0.651956\theta - 1.00049 \quad (6.1)$$

$$r^2 = 0.999291 \quad r = 0.99964$$

$$t_v = -0.000018\theta^3 - 0.000766\theta^2 + 0.553386\theta - 0.116683 \quad (6.2)$$

$$r^2 = 0.999992 \quad r = 0.999996$$

En la figura, la línea fuerte es la función parabólica, el contorno del área sombreada es la función cúbica y los datos aparecen representados por cuadros. Nótese como ambas curvas coinciden en el intervalo  $[0,90]$  y el máximo valor se presenta en el extremo derecho del intervalo ( $\theta = 90^\circ$ ), cuando el movimiento correspondería a caída libre.



**Parte III:** El alcance máximo horizontal también se relaciona con el ángulo de disparo de manera cuadrática (ec. 7.1) o cúbica (7.2). El peso del coeficiente cúbico en (7.2) es despreciable, y la correlación en ambos casos varía muy poco (0.0002) por lo que es más práctico tomar la forma cuadrática sin exponer ni la precisión ni la exactitud.

$$R_V = -1.166899\theta^2 + 105.435912\theta - 132.103585 \quad (7.1)$$

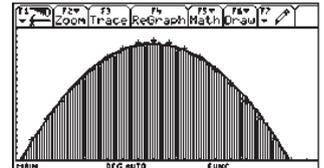
$$r^2 = 0.996642 \quad r = 0.998320$$

$$R = 0.00124\theta^3 - 1.343564\theta^2 + 112.332021\theta - 193.936122 \quad (7.2)$$

$$r^2 = 0.997189 \quad r = 0.998594$$

Ambos coeficientes cuadráticos son negativos, razón por la cuál, la curva debe ser cóncava hacia abajo.

En la figura, la línea fuerte es la función parabólica, el contorno del área sombreada es la función cúbica y los datos aparecen representados por signos "+". Nótese como ambas curvas coinciden en el intervalo  $[0,90]$  y el máximo valor se presenta en el centro del intervalo ( $\theta = 45^\circ$ ).



**Parte IV:** La altura máxima se relaciona con el ángulo de disparo de manera cuadrática (ec. 8.1) o cuártica (8.2). El peso de los coeficientes cuártico y cúbico en (8.2) es despreciable, y la correlación en ambos casos varía muy poco (0.0008) por lo que es más sencillo tomar la forma cuadrática. La precisión y la exactitud no se ven afectadas de manera significativa.

$$Y_{max_v} = 1.276076\theta^2 + -35.807770\theta + 339.455951 \quad (8.1)$$

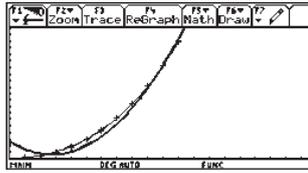
$$r^2 = 0.998345 \quad r = 0.999172$$

$$Y_{max_v} = -0.0000005\theta^4 + 0.008117\theta^3 + 0.202905\theta^2 + 5.013165\theta - 22.082426 \quad (8.2)$$

$$r^2 = 0.999999 \quad r = 0.999999$$

En ambos casos, el coeficiente cuadrático es positivo, por lo que la curva debe ser cóncava hacia arriba.

En la figura, la línea fuerte es la función parabólica, y la línea delgada es la función cuártica y los datos aparecen representados por signos "+". Nótese como ambas curvas coinciden en el intervalo [60,90] y el máximo valor se presenta en el extremo derecho del intervalo ( $\theta = 90^\circ$ ), cuando el movimiento correspondería a caída libre.



#### 4. Conclusiones.

La calculadora simbólica graficadora es una herramienta esencial para la simulación de situaciones reales, tales como el movimiento parabólico. Además, el hecho de ser simbólica, simplifica grandemente los cálculos, pues permite la evaluación directa y despejes de fórmulas.

El movimiento de proyectiles presenta varias características propias:

- i. Es un movimiento parabólico, combinación de dos tipos de movimiento, uniforme en el eje horizontal y acelerado en el eje vertical.

- ii. El alcance máximo horizontal, para un lanzamiento desde el suelo, se presenta a  $45^\circ$ .
- iii. Ángulos complementarios tienen igual alcance horizontal.
- iv. Es posible modelar con polinomios de segundo grado, las relaciones Tiempo de vuelo - Angulo de disparo, Alcance máximo horizontal - Angulo de disparo y Altura máxima - Angulo de disparo sin pérdida de precisión ni exactitud.

#### 5. Referencias bibliográficas:

Alvarado Ortega, R.: Cinemática, Publicaciones ITCR. San Carlos, CR, 2000  
 Apóstol, T.: Calculus Vol. I, y II, Editorial Reverté, España, 1982.  
 Bronstein, I; Semendiaev, K: Manual de matemáticas. 4 ta ed. MIR. Moscú. Rusia, 1982  
 González Sánchez, F: Principios de Mecánica. Publicaciones UCR. San José, CR, 1980.  
 Serway, R: Física: Física. Tomo 1. 3 era ed. Mc Graw-Hill. México 1992.

## Explorando medias con la Voyage™ 200

Juanita Contreras S y Claudio del Pino O

La exploración juega un papel central en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En el último tiempo, gracias a la incorporación de la tecnología en estos procesos, esta actividad se ha visto fuertemente favorecida, pues junto con ofrecer un trabajo más expedito, también permite un abordaje desde los puntos de vista numérico, gráfico y analítico (algebraico). En general, la exploración se inicia con estudios numéricos y gráficos, los cuales permiten establecer conjeturas, las que posteriormente pueden eventualmente ser comprobadas analíticamente. El presente trabajo ilustra estos aspectos en el estudio de las relaciones de desigualdad existente entre las medias armónicas, geométricas, aritméticas y cuadráticas, con el apoyo de la calculadora Voyage™ 200.

Problema: Deducir y verificar las relaciones de desigualdad, entre las *MA* (media aritmética), *MC* (media cuadrática), *MG* (media geométrica) y *MH* (media armónica) de dos números positivos *x* e *y*, definidas por:

$$MA(x,y) = \frac{x+y}{2}, MC(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, MG(x,y) = \sqrt{xy} \text{ y } MH(x,y) = \frac{2}{1/x+1/y}$$

Nota: En lo que sigue, cuando los números *x* e *y* se subentiendan se escribirá simplemente, por ejemplo, *MA* en lugar de *MA(x,y)*.

#### Exploración numérica:

Como una primera aproximación al problema, se puede iniciar con una experimentación numérica.

Para empezar definamos, en el ambiente HOME, las cuatro funciones correspondientes a las *medias* en estudio.

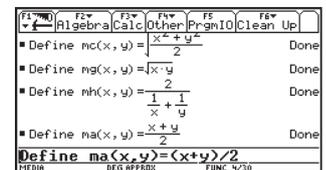


Figura 1

Ahora abramos, desde las aplicaciones, una nueva matriz. Coloquemos en su primera columna los valores de *x*, en la segunda los valores de *y*, en la tercera *MH(x,y)*, en la cuarta *MG(x,y)*, en la quinta *MA(x,y)* y en la siguiente *MC(x,y)*. En las columnas de *x* e *y* ingresemos números aleatorios.

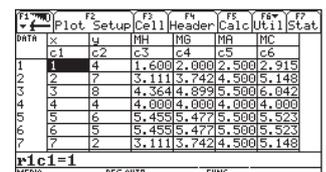


Figura 2

Por exploración de la tabla de valores obtenida, podemos establecer 2 conjeturas:

- 1) Cuando los números *x* e *y* son distintos, se cumple que:  $MH < MG < MA < MC$ .
- 2) Cuando los números *x* e *y* son iguales (y solamente en este caso), se tiene que:  $MH = MG = MA = MC$ .

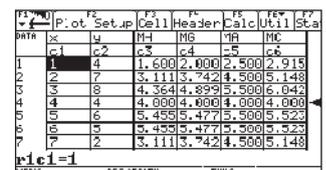


Figura 3

Estas conjeturas se pueden resumir, en el siguiente enunciado: *Dados dos números reales positivos  $x$  e  $y$ , se tiene que  $MH \leq MG \leq MA \leq MC$  donde la igualdad sólo se cumple cuando  $x = y$*

Como es de suponer, en este mismo ambiente podemos corroborar la conjetura para otros valores de las variables  $x$  e  $y$ , siempre teniendo en cuenta que no importando la cantidad de valores chequeados, nuestra conjetura sólo se ve *más confirmada, pero no comprobada*.

### Exploración gráfica:

Para explorar gráficamente el problema planteado, se puede trabajar en los ambientes de gráfico de funciones 2D, usando el programa Cabri Geométrico (que se puede instalar como aplicación flash a la calculadora Voyage™ 200) y gráfico de funciones 3D.

**Ambiente gráfico (2D):** Vamos al ambiente de ingreso de funciones y definamos dos funciones (positivas)  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ . Luego ingresamos en, por ejemplo  $y_3, y_4, y_5$  e  $y_6$ , las funciones,  $mh(y_1(x), y_2(x)), mg(y_1(x), y_2(x)), ma(y_1(x), y_2(x))$  y  $mc(y_1(x), y_2(x))$  respectivamente. Luego, eligiendo una ventana apropiada se grafican, por ejemplo, primero  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$ , y luego en otra ventana las funciones correspondiente a las medias en estudio.

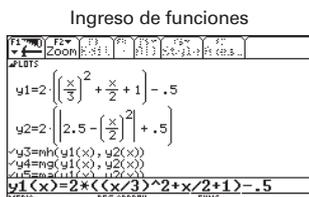


Figura 4



Figura 5

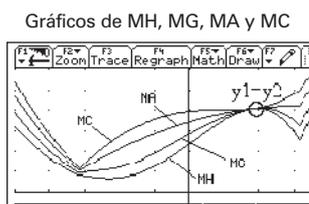


Figura 6

Por inspección de los gráficos obtenidos se confirma, en el ambiente gráfico, la conjetura ya obtenida.

**Ambiente gráfico (3D):** En este caso, como las expresiones en estudio dependen de 2 variables, podemos extender nuestra exploración al ambiente de gráficos 3D que ofrece la calculadora Voyage™ 200. Para ello, luego de seleccionar este modo (MODE-GRAPH-3D), ingresamos y graficamos las funciones

$$z_1 = ma(x,y) - mg(x,y), z_2 = mg(x,y) - mh(x,y) \text{ y } z_3 = mc(x,y) - ma(x,y)$$

Obteniendo los siguientes gráficos:

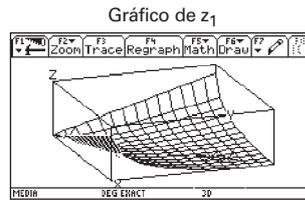


Figura 7

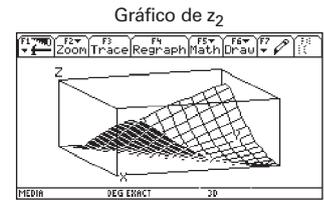


Figura 8

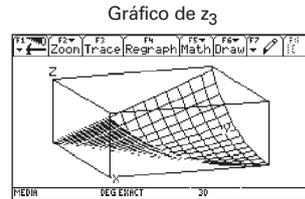


Figura 9

Por inspección de estos gráficos se tiene que  $z_1 \geq 0, z_2 \geq 0$  y  $z_3 \geq 0$ . Además los gráficos precedentes *insinúan* que las igualdades de las medias se obtienen cuando  $x = y$ . Luego, obtenemos una confirmación más sobre la conjetura establecida previamente.

**Ambiente Cabri:** El ambiente de geometría dinámica que ofrece el software Cabri-geométrico que se puede instalar como aplicación flash en la calculadora Voyage™ 200, también nos permite realizar diversas exploraciones del problema que nos preocupa. Una posible exploración es la siguiente:

Dados dos segmentos  $x$  e  $y$ , se construye una semicircunferencia de diámetro  $x+y$  ( $PQ = x, QR = y$ ). Siendo  $M$  el punto medio del diámetro,  $MT$  radio y  $QT \perp PR$  se obtiene que  $MT = \frac{x+y}{2} = MA$  y observando que los triángulos  $\triangle PQT \approx \triangle TQR, QT = \sqrt{xy}$ . De donde,  $MG(x,y) < MA(x,y)$ .

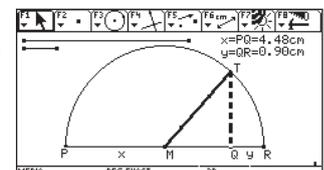


Figura 10

Ahora, en la figura 10 se traza el arco de circunferencia de centro  $T$  y radio  $TQ$ . Este arco intersecta el radio  $MT$  en el punto  $K$ . Luego se traza el segmento  $KH$  de modo que  $KH \perp QT$ . Usando que  $\triangle THK \approx \triangle KHQ$  se obtiene que  $TH = \frac{2xy}{x+y} = MH$ .

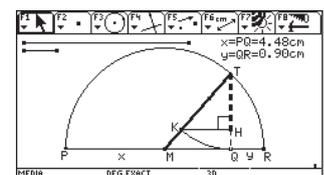


Figura 11

Luego,  $MH(x,y) < MG(x,y)$ .

A continuación, en la figura 11 se construye el arco de circunferencia de centro  $M$  y radio  $MQ$ , el segmento  $ML$  perpendicular en el punto  $M$  a  $MT$ .

Como  $MQ = \frac{x-y}{2}$  se tiene que  $LM = \frac{x-y}{2}$ . Finalmente, usando el Teorema de Pitágoras en el  $\triangle LMT$ , se obtiene que  $LT = MC(x,y)$ . Por lo tanto,  $MA(x,y) < MC(x,y)$

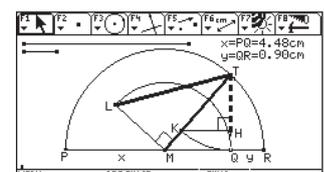


Figura 12

De las conclusiones obtenidas trabajando en diferentes ambientes de la calculadora Voyage™ 200, se tiene que la conjetura, con un altísimo grado de validez general, es:

**Conjetura final:** Dados dos números reales positivos  $x$  e  $y$ , se cumple que

$$MH(x,y) \leq MG(x,y) \leq MA(x,y) \leq MC(x,y)$$

es decir,

$$\frac{2}{1/x+1/y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

donde la igualdad se cumple siempre y cuando  $x=y$ .

Una vez establecida la conjetura, viene la etapa de la demostración. En la situación en estudio, esta etapa también puede ser abordada con la calculadora Voyage™ 200. Para ello vamos al ambiente de álgebra e ingresemos el comando:

■ **Factor**( $mg(x,y) - mh(x,y)$ ) |  $x > 0$  and  $y > 0$ . Dando **Enter**, la calculadora devuelve la expresión equivalente  $\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{x+y}$

Como esta expresión es claramente no negativa, se tiene que  $mg(x,y) - mh(x,y) > 0$ . Luego, se ha demostrado que  $mg(x,y) = mh(x,y)$ . Además, como la expresión precedente solamente se anula en el caso que  $x=y$ , se tiene  $mg(x,y) = mh(x,y)$  solamente cuando  $x=y$ .

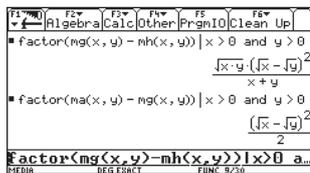


Figura 13

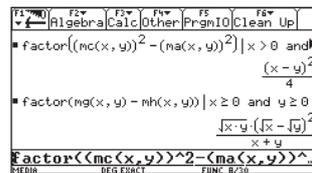


Figura 14

Análogamente, ingresando los comandos:

■ **Factor**( $ma(x,y) - mg(x,y)$ ) |  $x > 0$  and  $y > 0$ , que se simplifica a  $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}$ .

■ **Factor**( $mc(x,y)^2 - ma(x,y)^2$ ) |  $x > 0$  and  $y > 0$ , que se simplifica a  $\frac{(x-y)^2}{4}$ .

Se obtiene la demostración del resto de la conjetura.

Como se ha podido comprobar en este trabajo, la calculadora Voyage™ 200 es una excelente aliada al momento de explorar (numérica y gráficamente) una situación problemática. No se puede dejar de destacar que, en este caso, su potencia algebraica ha permitido adicionalmente demostrar la conjetura establecida inicialmente a partir de las exploraciones realizadas en sus ambientes numéricos y gráficos.

### Bibliografía:

1. Beckenbach, E., Bellman, R. *An introduction to inequalities*. Ed. Random House. 1961.
2. Caponi, B., Laborde, J. M. *Cabri Géomètre, de l'ordinaerur à la calculatrice*. IUFM de Grenoble, IREM de Grenoble, EIAH Leibniz, IMAG, Grenoble. 1998.
3. Courant, R., y Robbins, H. *¿Qué es la matemática?*. Editorial Aguilar. Madrid 1962.
4. Georgakis, C. *On the inequality for the arithmetic and geometric means*. Journal Mathematics, Inequalities and applications. Vol. 5 N° 2. 2002.

## La función exponencial y la multiplicación de bacterias

Mauricio Bustos Bravo – [mauricio\\_bustosb@yahoo.com](mailto:mauricio_bustosb@yahoo.com)

Las bacterias nos han acompañado desde el principio de los tiempos; creando nuevas formas de vida y en otras oportunidades causando graves enfermedades. Una situación habitual de una población de bacterias es el aumento continuo y cuyo modelo matemático puede ser representado con buena aproximación con la función exponencial.

### Problema:

Al observar una población de bacterias se determinó que cada cuatro horas doblaba su cantidad, además al comenzar el experimento había 100 bacterias (población inicial)

A partir de esta información se pide:

a) Deducir el modelo matemático que relaciona el número de bacterias (**N**) con el tiempo trascurrido (**t**). Use para **t** intervalos de 4 horas (múltiplos de 4), partiendo desde 0 hasta 24 horas

### Desarrollo:

Para este fin usaremos una tabla que represente la situación:

t (horas)	N (número de bacterias)	Relacionando t con N
0	100	$100 \times 2^{0/4} = 100 \times 2^0 = 100$
4	$100 \times 2$	$100 \times 2^{4/4} = 100 \times 2^1 = 200$
8	$(100 \times 2) \times 2$	$100 \times 2^{8/4} = 100 \times 2^2 = 400$
12	$((100 \times 2) \times 2) \times 2$	$100 \times 2^{12/4} = 100 \times 2^3 = 800$
16	$((((100 \times 2) \times 2) \times 2) \times 2)$	$100 \times 2^{16/4} = 100 \times 2^4 = 1600$
20	$(((((100 \times 2) \times 2) \times 2) \times 2) \times 2)$	$100 \times 2^{20/4} = 100 \times 2^5 = 3200$
24	$((((((100 \times 2) \times 2) \times 2) \times 2) \times 2) \times 2)$	$100 \times 2^{24/4} = 100 \times 2^6 = 6400$
⋮	⋮	⋮
x	$(\dots((((100 \times 2) \times 2) \times 2) \times 2) \times 2) \dots) \times 2$ x/4 veces multiplicamos por 2	$100 \times 2^{x/4}$

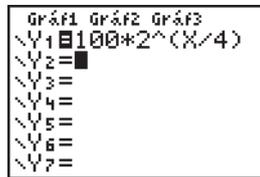
Para obtener los valores de la tabla podemos usar la calculadora TI-84 Plus de la siguiente forma:

Por ejemplo, para determinar el valor de N para  $t=20$  empleamos las siguientes teclas:

[1] [0] [0] [x] [2] [^] [(] [2] [0] [)] [4] [)] [ENTER]

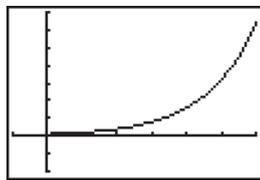
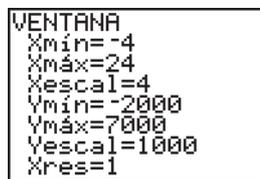
b) Graficar la función exponencial obtenida en la parte (a):

**Paso 1:** presionar tecla [Y=], luego escribir la expresión obtenida en la pregunta (a)



**Paso 2:** Definir los rangos de visualización (Dominio y Recorrido de la función); presionar la tecla [WINDOWS] e ingresar los datos que muestra la figura siguiente.

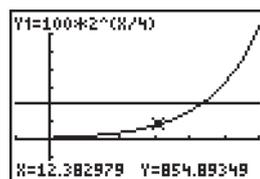
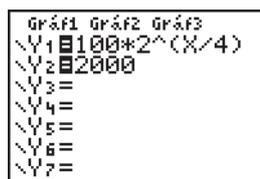
**Paso 3:** Graficar la función; presionar la tecla [GRAPH]



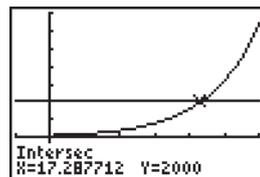
c) Determinar gráficamente el tiempo (t) en que las bacterias alcanzan 2000

**Paso 1:** presionar tecla [Y=], luego escribir en Y2 = 2000 como muestra la siguiente pantalla.

**Paso 2:** Graficar las funciones Y1 e Y2 presionando la tecla [GRAPH].



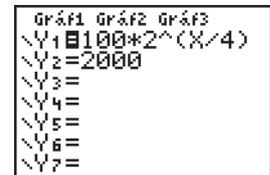
**Paso 3:** Para dar respuesta a la pregunta debemos determinar la intersección de ambas gráficas. Para hacer acceso a la opción de intersección debemos usar las siguientes teclas [2ND] [CALC] [5] [ENTER] (Para seleccionar la primera función) [ENTER] (Para seleccionar la segunda función) y luego [ENTER] (Para indicar un lugar de aproximación a la intersección), obteniendo la pantalla siguiente.



Luego en  $t = 17,3$  aproximando a tres cifras significativas la población alcanzará el valor 2000.

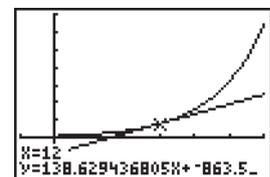
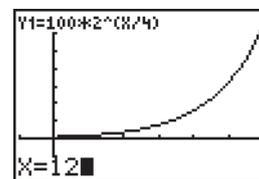
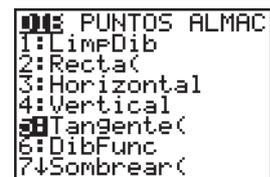
d) Dibujar la tangente a la función exponencial y determinar la tasa de crecimiento de las bacterias cuando  $t = 12$  horas.

**Paso 1:** Desactivar la gráfica Y2 para evitar confusiones; presionar [Y=] luego ubicar el cursor sobre el signo = y luego presionar [ENTER].

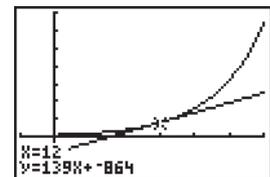


**Paso 2:** Usar la tecla [TRACE] y moverse en la gráfica.

Luego para determinar la tangente en  $t = 12$ , presionar [2ND] [DRAW] [5] y [ENTER] y [1] [2] [ENTER] y observaremos:



El valor indicado como la pendiente de la línea recta dada por la calculadora en la expresión:  $y = 138.629436805x + -863.5$  es decir 139 aproximado a tres cifras significativas corresponde a la tasa de crecimiento en  $t = 12$

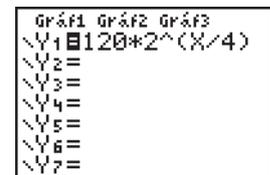


e) Suponga que a las 9:00 AM de algún día lunes, la población de bacterias es de 120 unidades. Determine la población que había hace 8 horas antes y también a las 9:00 AM del día siguiente (Martes).

**Paso 1:** Debemos modificar nuestro modelo así como se muestra en la siguiente pantalla:

**Paso 2:** Además modificar las opciones de la tabla de datos [2nd] [TBLSET] así como se muestra en la pantalla:

**Paso 3:** Luego hacemos acceso a la tabla de datos de la función definida [2nd] [TABLE] y nos ubicamos en -8 es decir 8 horas antes:



X	Y1
-12	15
-8	30
-4	60
0	120
4	240
8	480
12	960

Y observamos el valor que corresponde a -8, es decir 30; este valor indica que 8 horas antes había 30 bacterias.

**Paso 4:** Para determinar la cantidad de bacterias que habrá a las 9:00 AM del día siguiente usamos la misma tabla pero ahora llevaremos nuestro cursor al número 24, es decir 24 horas después.

Y observamos el valor que corresponde a 24, es decir 7680; este valor indica que 24 horas después (9:00 AM del día martes) había 7680 bacterias.

X	Y1
4	240
8	480
12	960
16	1920
20	3840
24	7680
28	15360

X=24

## Conclusiones:

Este tipo de actividades con apoyo de la calculadora TI-84 Plus resulta especialmente motivante y eficaz tanto para los alumnos como para el profesor, permitiendo hacer correcciones y variaciones al problema planteado con facilidad.

Por otra parte aplicar las nuevas tecnologías en la sala de clases nos ayuda a entender con más claridad conceptos abstractos y sentirnos parte del quehacer de las ciencias.

## Referencias

1. Texas Instruments. (2002), Manual de la calculadora TI – 84 Plus Silver. USA.
2. Barrales M. (2005). Geometry, Functions and Technology. XVIII Education Conference of British Schools in Chile. Universidad de los Andes. Santiago de Chile.

## Calculadoras Texas Instruments en el sistema de préstamos de biblioteca

Fabiola Albornoz Bulnes – [fabiola.albornoz@usm.cl](mailto:fabiola.albornoz@usm.cl)

### Introducción:

El uso de calculadoras gráficas, simbólicas y programables se ha convertido en una herramienta de apoyo indispensable para estudiantes del área de las matemáticas y ciencias de la ingeniería.

Debido a la creciente necesidad en el uso de estos equipos y comprendiendo que constituye una poderosa herramienta en el proceso de aprendizaje y resolución de problemas, es que gradualmente algunas bibliotecas de universidades y colegios han ido incorporando el préstamo de calculadoras modelos Voyage 200 y TI-89 Titanium.

### Proyecto:

A comienzos del año 2004, con fondos de un proyecto gubernamental, la Universidad Técnica Federico Santa María, Campus Santiago de Chile adquirió 15 calculadoras Texas Instruments TI-89, con el propósito de brindar un nuevo servicio a los alumnos de la Universidad, las que serían administradas por la Biblioteca.

### Una vez en la biblioteca:

Las 15 calculadoras se ingresaron a la colección de biblioteca y se estipuló que serían prestadas por el día, en la modalidad similar a un préstamo texto de estudio. Al año de estar en funcionamiento esta iniciativa se alcanzó a concretar alrededor de 4.500 préstamos, logrando así ser uno de los proyectos más reconocidos de apoyo al estudiante y al profesor. Dado el éxito alcanzado, al año siguiente se incremento en biblioteca 15 unidades más del modelo TI-89 Titanium, hecho que permitió aumentar el plazo de préstamos a dos días, logrando con esto alcanzar al final del año los casi 10.000 préstamos. Esta colección ha superado ampliamente las expectativas de uso, es por esto que este año se aumentó la colección a 45 unidades

considerando el modelo TI-89 Titanium, esperando así que el servicio que da biblioteca esté cada día cerca del óptimo.

### Comentarios:

Como complemento a este proyecto periódicamente se ofrecen talleres de capacitación para provocar un mejor aprovechamiento de las calculadoras. La colección no ha sufrido problemas técnicos, y están siempre todas ellas disponibles para ser usadas por los estudiantes.

Fabiola Albornoz, jefa de la biblioteca del Campus Santiago de la U.T.F.S.M. recomienda la creación de esta colección no tradicional en las bibliotecas de otras universidades.



### Introducción

La imaginación de nuestros alumnos ésta siendo cada día invadida por medios que estructuran y enmarcan los pensamientos de éstos, siendo disminuidas las posibilidades de poder crear y desarrollar nuevas estrategias para poder asimilar conceptos que parecen ser tan abstractos y lejanos de la cotidianidad que a ellos se les presenta, por esto es tan importante que los alumnos conozcan los medios por los cuales algunas personas pudieron resolver los problemas que se les presentaban, desarrollando grandes poderes de pensamiento dinámico que les permitían poder estructurar, y articular los conceptos, como por ejemplo el método de exhaución, siendo ésta una de las herramientas principales que permitió el nacimiento del cálculo.

La geometría es el fundamento del entendimiento del cálculo, por lo cual no debería separarse en demasía de las construcciones de los conceptos y para esto la tecnología da la posibilidad a los profesores y a los alumnos de una interacción entre los aspectos netamente abstractos, analíticos del objeto matemático y sus diferentes representaciones geométricas (espaciales), por ello Duval menciona lo siguiente:

*“.....estamos en presencia de lo que se pondría llamar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y por otro lado solamente por la representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos”*

Es por esto que cada construcción de un objeto matemático debe ir acompañada de su representación inherente ya que facilitará la asimilación del concepto y de sus múltiples consecuencias.

Ahora observando la conceptualización de objetos matemáticos desde una perspectiva teórico constructivista la manualidad que ofrece la tecnología portable junto con el apoyo del profesor, debieran ser suficientes para que los alumnos construyan los objetos matemáticos de forma fácil y rápida, desechando cualquier estado de rechazo y timidez que comúnmente se producen en las clases de matemática ya que serán estos los que controlen el ritmo de su aprendizaje. Para esto el profesor debiera conocer las oportunidades que la tecnología portable le ofrece para desarrollar y fomentar técnicas de aprendizaje como las “*Guías de aprendizaje*” las cuales permitirían a los alumnos desarrollar sus aptitudes y habilidades de captación, relación y narración, junto con algunas habilidades motoras las que irán en beneficio de su formación profesional y social.

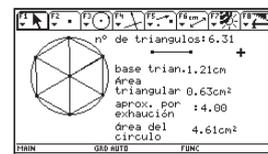
Así mi trabajo tratará de mostrar como los programas “Cabri Geometry, Calculus Tools” de la calculadora Voyage 200 junto al programa para PC “Cabri II Plus” permiten una construcción del objeto matemático *Integral definida* a través de las técnicas de exhaución usado por Arquímedes que fueron la inspiración del Alemán Georg Riemann, con lo cual se observará una clara secuencia metodológica

### Propuesta de enseñanza

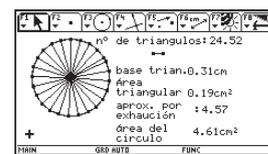
Para poder calcular el área a través del método de exhaución, se necesita un trabajo previo en la calculadora ya que Cabri no permite una división del perímetro del círculo por una determinada medida, lo cual nos lleva a trabajar sobre un arco en la circunferencia, realizando transferencia de medidas de la longitud de un segmento el cual será la base del triángulo.

### El Método de Exhaución

1. El método de exhaución lo usaba Arquímedes para el cálculo de las áreas de las elipsis, sectores parabólicos y sectores de una espiral, utilizando este método como tarea introductoria para la conceptualización de la integral definida se puede calcular el área de un círculo utilizando triángulos isósceles de base común, los cuales abarcarán toda la circunferencia. Se puede observar en la figura que el segmento es la medida de la base del triángulo, por lo cual el área que abarcan los triángulo será el producto del área de un triángulo por la cantidad de estos dentro del círculo



2. Al tomar el segmento e ir disminuyendo su medida veremos que la cantidad de triángulos irá aumentando y el área de ellos irá disminuyendo lo que mostrará una aproximación del área del círculo.



3. De esta forma podemos encontrar el área del círculo disminuyendo cada vez más la medida del segmento que representa la medida de la base del triángulo



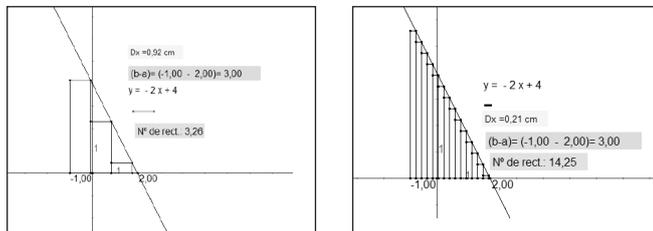
4. De lo anterior podemos concluir que en el límite la base del triángulo llega a ser un punto de la circunferencia y la altura del triángulo llega a ser el radio, así la acumulación de los puntos da como resultado la circunferencia y así podemos calcular el perímetro del círculo pero como recordamos ésto estaba dividido por dos, luego nos resulta el semiperímetro, entonces el área del círculo será:

$$\begin{aligned}
 \text{Área del Círculo} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n \text{área de triángulo} \right) \\
 &= \lim_{\text{base} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (\text{base}_i \times \text{altura}) \\
 &= (\text{Semiperímetro}) \times (\text{radio}) \\
 &= (\pi \times r) \times (r) \\
 &= \pi \times r^2
 \end{aligned}$$

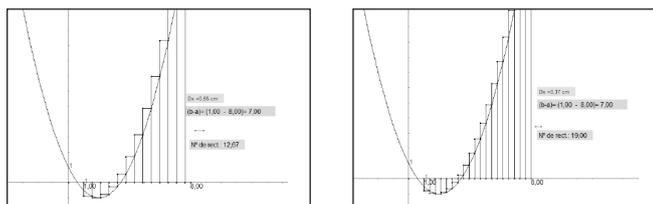
Lo anterior nos muestra la facilidad de poder concluir a través de una dinámica que presenta el método de exhaución junto a la manualidad de la calculadora una gran fórmula.

### Sumas de Riemann

Realizando el mismo trabajo previo en Cabri II Plus al trabajo realizado con el método de exhaución para el área de la circunferencia, pero ahora con rectángulos, podemos mostrar las famosas sumas de Riemann que permiten el cálculo del área debajo de la curva.



Es claro que el método de exhaución permite (por medio del trabajo de los alumnos en un principio) llegar al área del triángulo, sumando las áreas de los rectángulos, a lo cual hay que dar énfasis, ya que los alumnos compararán éste nuevo método con el que ya conocen para poder calcular áreas y observaran que los dos permiten el cálculo del área de una determinada región del plano, lo cual les permitirá acercarse al concepto de integral más fácilmente. Ya que anclarán este concepto en otro ya asimilado, así se podrá pasar a otro tipo de curvas donde también se muestre las sumas de rectángulos que ya han visto para poder obtener el área bajo ésta.



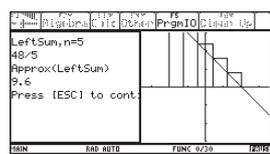
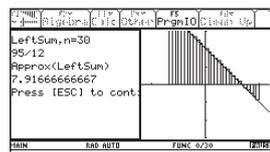
Pero aquí de nuevo se requiere del trabajo de los alumnos, por esto el programa "Calculus Tools" de la calculadora Voyage 200 permite realizar este trabajo solamente especificando el intervalo, la curva y la cantidad de rectángulos en que se va a dividir la región a calcular.

### Calculus Tools

Se puede obtener el programa a través de la página "educación.ti.com", siendo el símbolo en la de aplicaciones:



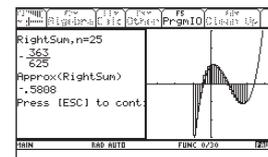
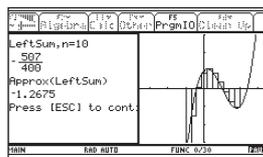
1. El programa permite dividir la región con los rectángulos que uno quiera para poder tener una buena aproximación y nos muestra la aproximación del área y el producto de la longitud del intervalo por la suma de ordenadas determinadas por  $X_i$



Donde

$$\frac{36}{5} = \sum f(x_i)\Delta x; \frac{108}{13} = \sum f(x_i)\Delta x$$

2. Además se puede aproximar el área bajo la curva tanto por sumas superiores como inferiores



3. Así podemos formalizar la definición de área bajo una curva, para luego pasar a la definición de integral definida y a los muchos teoremas que se desprenden de las sumas de Riemann, como por ejemplo el "teorema del valor medio"

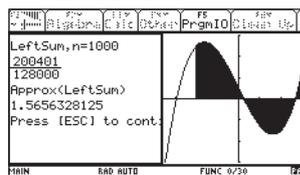
#### Definición:

El área de una región limitada por la gráfica de una curva y el eje x en intervalo cerrado  $[a,b]$  es:

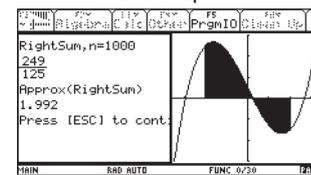
$$\text{Área} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \frac{(b-a)}{n} \quad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

Pero sabemos que antes de dar la definición de la integral definida debemos mostrar que las sumas superiores e inferiores son iguales si el número de rectángulos tiende a infinito, lo cual podemos mostrar con la calculadora.

#### Suma inferior



#### Suma superior



Observando los resultados vemos que hay diferencia desde la centésima con una cantidad de 1000 sub-intervalos.

4. Finalmente podemos dar la definición de "integral definida";

#### Definición:

Si  $f(x)$  esta definida en el intervalo cerrado  $[a,b]$  y existe el limite

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

entonces  $f(x)$  es integrable en  $[a,b]$  y el límite se denota

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Finalizando este trabajo puedo decir que la conceptualización de un objeto matemático depende sustancialmente del trabajo que realiza el profesor como guía en el aprendizaje de los alumnos.

### Bibliografía:

1. Hitt Fernando, *UNA REFLEXIÓN SOBRE LA COSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN AMBIENTES CON TECNOLOGIA*, Boletín de la Asociación matemática Venezolana, (2003).
2. Inciarte Rodríguez Mercedes de la *E. TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN*.
3. *UN EJJE TRANSVERSAL PARA EL LOGRO DE APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS*. Revista iberoamericana sobre calidad, eficacia y calidad en educación (2004)
4. Turegano Moratalla, P. *DEL ÁREA A LA INTEGRAL. UN ESTUDIO EN EL CONTEXTO EDUCATIVO*.1998

## Resumen:

En las actividades de Laboratorio de Física se contempla la evaluación de las Energías en un Péndulo Simple, basado en actividades y recursos manuales, el método del espejo para calcular la velocidad instantánea, el uso de timer, la construcción de tabla de datos y gráficos en el computador todo en forma manual hacen que el experimento sea complejo y extenso. Con la incorporación de las nuevas tecnologías portables el tiempo del práctico se acorta, es posible tomar datos y ser analizados en forma muy rápida su manipulación es amigable, toda la información se puede manejar en la calculadora y obtener en forma simultanea los gráficos de posición – tiempo; velocidad – tiempo y aceleración – tiempo; es decir toda la física del problema propuesto. Su uso no sólo se restringe al laboratorio, si no que pueden ser utilizadas también en terreno.

## Objetivo General

Determinar las Energías Cinética (K), Potencial Gravitatoria ( $U_g$ ) y la Energía Total ( $E_t$ ), evaluando su conservación en un péndulo simple en media oscilación mediante datos experimentales obtenidos a través del sistema CBR y calculadora TI-84 Plus.

## Objetivos Específicos

Determinar los gráficos posición - tiempo; velocidad - tiempo y aceleración - tiempo.

Determinar los gráficos de la Energía Cinética (K), v/s Posición; Energía Potencial Gravitatoria ( $U_g$ ) v/s Posición y la Energía Total ( $E_t$ ) v/s Posición.

## Fundamento Teórico

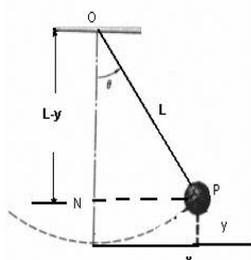
El problema del péndulo es bidimensional, el desplazamiento real viene especificado por el ángulo de abertura ( $\vartheta$ ). Los desplazamientos son esencialmente horizontales, el movimiento depende del hecho de que existe un ascenso y descenso del centro de masas produciendo un intercambio de energías mecánicas Cinéticas (K) y Potencial Gravitatoria ( $U_g$ ). De hecho; el péndulo se adapta muy bien un análisis mediante el principio de conservación de la energía, considerando que este es un sistema conservativo.

Energía Cinética:  $K = \frac{1}{2} mv^2$  [Joules]

Energía Potencial Gravitatoria:  $U_g = mgh$  [Joules]

Energía Total:  $E_t = K + U_g$  [Joules]

## Consideraciones Experimentales



De acuerdo a la figura, se tiene que para  $y < x$ , y si el ángulo de abertura  $\vartheta$  ( $\vartheta < 15^\circ$ )

A partir de la geometría de la figura, en el triángulo ONP, aplicando Pitágoras

$$l^2 = (l-y)^2 + x^2 \text{ desarrollando se obtiene}$$

$$\text{Para } y \text{ pequeño } 2ly - y^2 \approx y^2$$

$$\text{por lo tanto } y \approx \frac{x^2}{2l}$$

Por lo tanto las energías Cinética, Potencial Gravitatoria y la Total nos quedan

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad U_g = m g \left(\frac{x^2}{2l}\right)$$

$$E_t = \frac{1}{2} m v^2 + U_g = m g \left(\frac{x^2}{2l}\right)$$

## Materiales y Equipos

- Sensor CBR 2
- Calculadora Gráfica TI-84 Plus
- Programa Ranger
- Péndulo Simple

## Procedimiento

1. Conecte el sensor CBR. La **TI-84 PLUS SILVER** y el **CBR 2™** se deben conectar con un cable negro largo de acoplamiento.
2. Presione **[ON]** para encender la calculadora. Presione **[APPS]** y seleccione **5:CBL/CBR**. Cuando usted vea la pantalla principal del programa **CBL/CBR** presione **[ENTER]**, luego **3:RANGER** aparece en la pantalla **RANGER (V1.0)** y presione **[ENTER]**
3. Aparece **MAIN MENU** presione una vez **[v]** y presione **[ENTER]**, elija **2:SET DEFAULTS** y presione una vez **[v]** quedando frente a **[>] YES**, presione **[ENTER]** y coloque **NO**, presione una vez **[v]** presione **[ENTER]** y seleccione **TIME (S)** **[>]** y digite 2, presione una vez **[v]** **DISPLAY** **[>] DIST** presione una vez **[v]** quedando frente **BEGIN ON: [>]**, presione **[ENTER]** y seleccione **[TRIGGER]**, presione una vez **[v]** y elija **[>] HEAVY** presione una vez **[v]** y elija **METERS**, luego presione 6 veces **[^]** y presione **[ENTER]**
4. Coloque el sensor frente al péndulo a unos 15(cm) y presione **TRIGGER**, soltando el péndulo en forma simultanea. Espere que el sensor tome los datos y presione **[ENTER]** y aparecerá en la pantalla **TRANSFERRING** apareciendo el gráfico Distancia (m) v/s Tiempo(s) **FIG. A**.

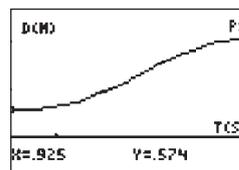


FIG. A

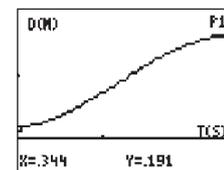


FIG. B

luego presione **[ENTER]** elija **4:PLOT-TOOLS** y elija **1:SELECT DOMAIN** proceda a elegir el borde izquierdo **LEFT BOUND?** y presione **[ENTER]**, luego elija el borde derecho **RIGHT BOUND?** obteniendo la nueva gráfica **FIG. B**. Según su criterio presione **[ENTER]** y proceda de igual manera con los gráficos de velocidad tiempo **VEL-TIME** y **ACCEL-TIME**.

# Conservación de energías en un péndulo simple

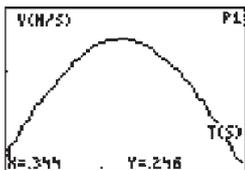


Gráfico Velocidad-Tiempo

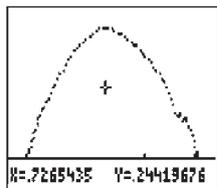


Gráfico Aceleración-Tiempo

Opcionalmente puede repetir el experimento eligiendo **REPEAT SAMPLE**.

- Presione **ENTER** y elija **7:QUIT**, luego presione la tecla **STAT** y elija **1:EDIT** y presione **ENTER** donde aparecen los listas con los datos obtenidos L<sub>1</sub>:tiempo, L<sub>2</sub>:posición, L<sub>3</sub>:velocidad, L<sub>4</sub>:aceleración

L2	L3	L4	1
0.344	4.324	54.343	
.22232	-3.508	55.168	
.16941	-2.613	55.134	
.14715	-1.68	45.334	
.15344	-.7926	33.452	
.18728	.01547	18.769	
.22844	.6635	3.2369	
L2(t)= .3052073533...			

## Cálculos

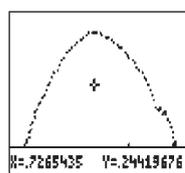
- Proceda a calcular la Energía Cinética:  $K = \frac{1}{2} m v^2$  [Joules]
- Presione la tecla **STAT**, elija **EDIT** y presione **ENTER**, vaya a la lista L5 =  $0,5 \cdot m \cdot (L2)^2$
- Luego aparece L5 = y asígnele L5 =  $0,5 \cdot m \cdot (L2)^2$  y presione **ENTER**
- Luego presione **2ND** y **STAT PLOT** y seleccione **1:GRÁF1** y presione **ENTER**, luego seleccione el tipo de gráfico que desea utilizar
- Asigne a la **LISTAX: L2** y a la **LISTA Y: L5** y seleccione el tipo de **MARCA: Wt\*** y presione la tecla **GRAPH**
- Proceda a calcular la energía Potencial Gravitatoria, usando la relación  $U_g = m g \left(\frac{x^2}{2l}\right)$
- Presione la tecla **STAT**, elija **EDIT** y presione **ENTER**, vaya a la lista L6
- Luego aparece L6 = y asígnele  $L6 = \frac{m \cdot 9,806}{2 \cdot l} \cdot (L2)^2$  y presione **ENTER**,
- Luego presione **2ND** y **STAT PLOT** y seleccione **2:GRÁF2** y presione **ENTER**, luego seleccione el tipo de gráfico que desea utilizar
  - Asigne a la **LISTAX: L2** y a la **LISTA Y: L6** y seleccione el tipo de **MARCA: Wt\*** y presione la tecla **GRAPH**
  - Proceda de igual manera para calcular la Energía Total ( $E_T$ ), en la lista L7 presione **2ND** y **STAT**, luego presione **▼** hasta llegar a la lista K y presione **ENTER**, en pantalla aparecerá LK, presione + y luego presione **2ND** y **STAT**, luego presione **▼** hasta llegar a la lista UG y presione, **ENTER** en pantalla aparecerá LUG y presione **ENTER**

- Luego presione **2ND** y **STAT PLOT** y seleccione **3:GRÁF3** y presione **ENTER**, luego seleccione el tipo de gráfico que desea utilizar

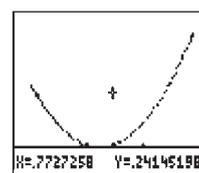
- Asigne a la **LISTAX: L2** y a la **LISTA Y: LE** y seleccione el tipo de **MARCA: Wt\*** y presione la tecla **GRAPH**

## Resultados

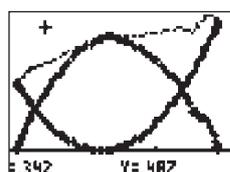
Los siguientes gráficas presentan las curvas de K v/s x, U<sub>g</sub> v/s x, y la de E<sub>T</sub> v/s x



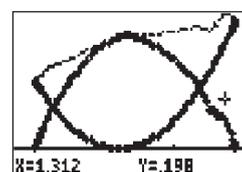
Energía Cinética



Energía Potencial Gravitatoria



Energía Total



La gráfica (c) muestra las tres gráficas de K, U<sub>g</sub> y ET v/s x, el decaimiento que se produce en ET = K + U<sub>g</sub>, se puede asociar a la posición que tiene el sensor al momento de la toma de datos, lo importante es que el alumno se de cuenta que la Energía total se conserva.

## Conclusiones

La incorporación de calculadoras en el Laboratorio de Física, permite acortar los tiempos de ejecución, destinando más tiempo al análisis y a la reflexión del tema en estudio, el profesor adquiere el rol de un facilitador del aprendizaje, los alumnos se sienten más motivados al trabajo grupal y cooperativo, la interacción entre los alumnos y el profesor se enriquece lo que favorece el proceso de enseñanza y aprendizaje, esta nueva forma de trabajo produce un cambio e innovaciones en las formas de gestión pedagógica y cambio en los roles del profesor y alumno

## Bibliografía

- A. P. French (1974) Vibraciones y Ondas Ed. Reverte, S.A. pp.( 59-60)
- Raymond A Serway, John W. Jewett Jr. 2005. Física Para Ciencias e Ingenierías, Ed Thomson
- Salvador Gil/Eduardo Rodríguez (2001) Física re-Creativa Experimentos de Física usando nuevas tecnologías. Ed. Prentice Hall
- Francisco Esquembre, Wolfgang Christian (2004) FisIest Enseñanza de la Física con Material Interactivo Ed. Prentice Hall pp.(95-96;159-163)
- Physical Science Study Committee, Física (PSSC) Ed. Reverte, S.A. pp.(68-69)
- <http://usuarios.lycos.es/pefeco/pendulo.htm>
- <http://www.fisicarecreativa.com/guias/pendulosimple.pdf>

## Introducción

Durante años predominó, en la educación matemática, una visión que sobrestimaba los aspectos formales, simbólicos y abstractos de la misma; que enfatizó su separación del entorno sociocultural, subestimando su relación simbiótica con el mundo. Pero en los últimos años, ha ido adquiriendo más fuerza una visión alternativa que apela a las dimensiones heurísticas, aplicadas, *contextualizadas* social y materialmente, de la matemática. Así, dentro de esta nueva perspectiva filosófica y educativa, se considera indispensable que las matemáticas deban enseñarse apelando a situaciones de la vida real (físicas y sociales), así como a una participación interactiva en la experiencia educativa por parte de los estudiantes; incorporando, además, las herramientas tecnológicas de que se dispone en la actualidad.

Al hablar de una educación matemática basada en contextos se nos viene a la mente el hecho de que ellas tienen una aplicación directa en la ingeniería, la arquitectura, la informática, etc. Todos nos podemos imaginar que, antes de poner manos a la obra, el ingeniero, el arquitecto o el programador tienen que comprobar que las estructuras que quieren desarrollar sean realizables teniendo en cuenta la resistencia de los materiales que empleará, las cargas que tienen que soportar y quizás también a los costos económicos, cálculos que se realizan, en la actualidad por medio de sofisticados programas de simulación virtual. Sin embargo, esta aplicación la asociamos, principalmente, al cálculo de estabildades, de tensiones, etc., pero en menor grado al diseño del objeto ingenieril, arquitectónico y menos aún en el diseño gráfico. Es normal pensar, especialmente con respecto a la creación artística, que el arquitecto aparta de su mesa de trabajo las matemáticas y deja volar la imaginación en la búsqueda de la forma deseada.

Pues bien, esto no es exactamente así. Lo que quizás resulta desconocido es que las matemáticas también pueden ayudar, y de hecho lo hacen, si no en el mismo momento mágico de creación artística, sí en el inmediatamente posterior. **“Toda creación arquitectónica es geometría”** es una máxima que se puede encontrar en los tratados de geometría descriptiva, y en la actualidad se puede ampliar al diseño gráfico en su expresión más amplia. Desde siempre, los arquitectos y los diseñadores han aprovechado curvas (o superficies) de las que pueden calificarse de clásicas y las combinaban acertadamente.

## Algo de Historia

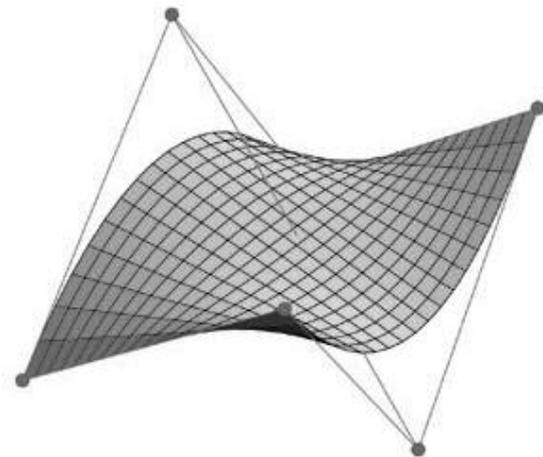
El origen de las curvas de Bézier nos retrotrae a los primeros días del diseño asistido por ordenador a finales de los años sesenta y comienzos de los setenta. Aparecen descritas por vez primera en 1972 por Pierre Etienne Bézier, cuando éste trabajaba como ingeniero para la empresa Renault. Bézier desarrolló este sistema de ecuaciones simples que permiten que se dibuje muy

fácilmente un número infinito de diferentes curvas en una pantalla como método para utilizarlo en el diseño de las carrocerías de los automóviles Renault.

Las curvas de Bézier tienen varias propiedades que hacen que sean especialmente útiles y convenientes para representar formas y superficies en 2D y en 3D de objetos en el ordenador. Y aunque rápidamente las curvas de Bézier se complementan con otras herramientas y sistemas de dibujo posteriores, éstas han llegado a convertirse *de facto* en el fundamento de, prácticamente, la totalidad del software de dibujo vectorial más reciente, y, por tanto, de la mayor parte de la producción gráfica digital para la web.

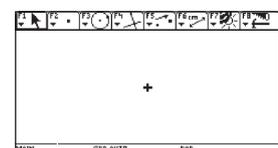
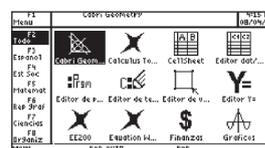


Fotografías (arriba) del restaurante de Les Alqueries, donde se puede ver la estructura ya acabada. Abajo, representación como superficie de Bézier de la cubierta de este restaurante.



## Construcción de una Curva de Bézier

Utilizando la herramienta Cabri dispuesta en la calculadora Voyage 200 desarrollaremos la construcción geométrica de una curva de Bézier, en los distintos grados que ella se puede realizar. Para comenzar ingresemos a la pizarra de geometría:



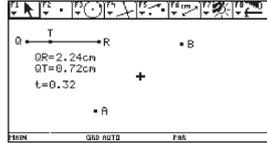
# Dando contexto al baricentro: las curvas de Bézier

Considerando los puntos **A** y **B**, y el parámetro  $t \in [0; 1]$ . Se desea determinar el punto **G** talque se cumpla:

$$\frac{AG}{GB} = \frac{t}{1-t} \quad (1)$$

Para la construcción, lo primero es generar de forma geométrica el parámetro  $t$ , para ello se considera un segmento  $\overline{QR}$  y un punto **T** sobre él. Con la herramienta "Distancia y longitud" se establece el valor de la razón:

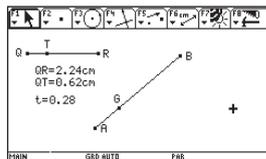
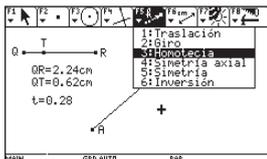
$$t = \frac{QT}{QR}$$



de la igualdad (1) se establece la siguiente relación vectorial para los puntos **A**, **B** y **G**:

$$\vec{AG} = \frac{t}{(1-t)} \vec{GB}$$

Por medio de la herramienta **HOMOTECIA** del segmento  $\overline{AB}$  con **centro A** y **razón t**, se determina el punto G, el cual es el baricentro de los puntos **A** y **B**, ponderados en  $(1-t)$  y  $t$  respectivamente.



Como esta construcción se utilizará de manera recurrente en la elaboración de las curvas de Bézier, es conveniente definir las como una herramienta **MACRO**

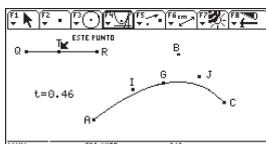
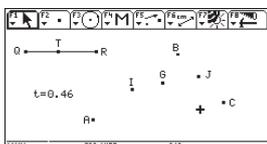


Los objetos iniciales son los puntos extremos del segmento (**A** y **B**) y el valor del parámetro  $t$  y el objeto final es el punto **G**.

Así, al considerar tres puntos **A** ; **B** y **C**. Se tiene una curva de Bézier de grado 2, para ellos se construyen sucesivamente los puntos **I**, **J** y **G**, de modo que se cumple:

$$\frac{AI}{IB} = \frac{BJ}{JC} = \frac{IG}{GJ} = \frac{t}{1-t}$$

Al aplicar nuestra Macro (punto ponderado) a los segmentos  $\overline{AB}$ ;  $\overline{BC}$  e  $\overline{IJ}$ , respectivamente obtenemos el punto G, el cual determina la curva de Bézier con puntos de control **A** ; **B** y **C**. Esta curva es el lugar geométrico del punto **G** cuando el punto **T** se desplaza sobre el segmento  $\overline{QR}$ .



## Ecuación paramétrica de una curva Bézier:

Al considerar un sistema referencial con origen en el punto **O**, la expresión

$$\vec{AG} = \frac{t}{(1-t)} \vec{GB}$$

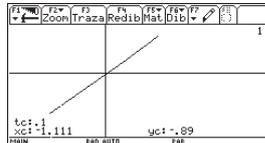
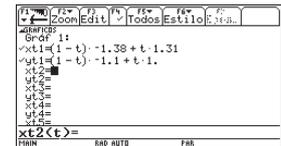
es equivalente a:

$$\vec{OG} = (1-t) \vec{OA} + t \vec{OB}$$

Así, el lugar geométrico definido por el punto **G** cuando el parámetro  $t$  toma los distintos valores de su dominio  $[0 ; 1]$  (o cuando el punto **T** se desplaza sobre el segmento  $\overline{QR}$ ), es un segmento cuyos extremos son los puntos **A** y **B**. Si consideramos los puntos de coordenadas **A** ( $x_A ; y_A$ ) y **B** ( $x_B ; y_B$ ) se obtienen las expresiones:

$$\begin{aligned} x_G &= (1-t) x_A + t x_B \\ y_G &= (1-t) y_A + t y_B \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Pasando a modo de Gráficas Paramétricas e ingresando las expresiones anteriores se obtiene la gráfica del segmento  $\overline{AB}$  (para definir el dominio del parámetro  $t$  se debe desplegar la ventana **WINDOW**). Asumamos las coordenadas, a modo de ejemplo, para los puntos **A** ( $-1,38 ; -1,1$ ) y **B** ( $1,31 ; 1,00$ ).



Si consideramos tres puntos **A**, **B** y **C**, no alineados, se obtiene una curva de Bézier de grado 2. A partir de la condición para los puntos **I**, **J** y **G**:

$$\frac{AI}{IB} = \frac{BJ}{JC} = \frac{IG}{GJ} = \frac{t}{1-t}$$

Al considerar un sistema referencial con origen en el punto **O**, es posible deducir las siguientes relaciones vectoriales:

$$\begin{aligned} \vec{OI} &= (1-t) \vec{OA} + t \vec{OB} \\ \vec{OJ} &= (1-t) \vec{OB} + t \vec{OC} \\ \vec{OG} &= (1-t) \vec{OI} + t \vec{OJ} \end{aligned}$$

de donde se deduce:

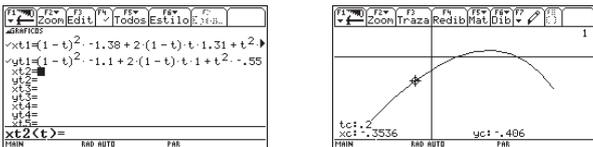
$$\vec{OG} = (1-t)^2 \vec{OA} + 2t(1-t) \vec{OB} + t^2 \vec{OC}$$

Consideramos los puntos de coordenadas **A** ( $x_A ; y_A$ ), **B** ( $x_B ; y_B$ ) y **C** ( $x_C ; y_C$ ) se obtienen las expresiones:

$$\begin{aligned} x_G &= (1-t)^2 x_A + 2(1-t) t x_B + t^2 x_C \\ y_G &= (1-t)^2 y_A + 2(1-t) t y_B + t^2 y_C \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 1$$

# Dando contexto al baricentro: las curvas de Bézier

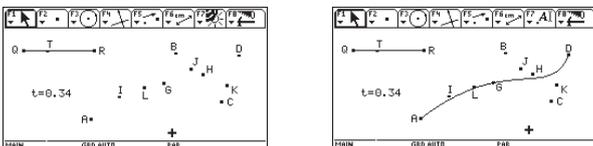
A modo de ejemplo, con los puntos **A** (-1,38 ; -1,1) , **B** (1,31 ; 1,00) y **C** (2,76 ; -0,55) se grafica:



Si se consideran 4 puntos (**A** , **B** , **C** y **D**) se obtendrá, ya sea por construcción o por expresión paramétrica una curva de Bézier de grado 3. Para ello se deberán considerar los puntos **I** , **J** , **K** , **H** , **L** y **G** los cuales cumplen la siguiente relación:

$$\frac{AI}{IB} = \frac{BJ}{JC} = \frac{CK}{KD} = \frac{IH}{HJ} = \frac{JL}{LK} = \frac{HG}{GL} = \frac{t}{1-t}$$

Al aplicar en forma sucesiva la MACRO "Punto Ponderado", definida al principio, a los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{IJ}$ ,  $\overline{JK}$ ,  $\overline{HL}$ , respectivamente, se determina el punto **G**; al trazar su lugar geométrico de igual manera como se hizo anteriormente, se obtiene una curva de Bézier de grado 3:



Resulta interesante la expresión vectorial mediante la cual se obtiene el punto **G**:

$$\overrightarrow{OG} = (1-t)^3 \overrightarrow{OA} + 3(1-t)^2 t \overrightarrow{OB} + 3(1-t) t^2 \overrightarrow{OC} + t^3 \overrightarrow{OD}$$

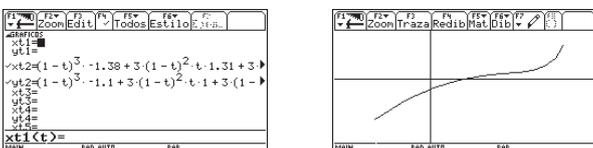
de donde se escriben las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x_G &= (1-t)^3 x_A + 3(1-t)^2 t x_B + 3(1-t) t^2 x_C + t^3 x_D \\ y_G &= (1-t)^3 y_A + 3(1-t)^2 t y_B + 3(1-t) t^2 y_C + t^3 y_D \end{aligned}$$

con  $0 \leq t \leq 1$

Al graficar esta expresión para los puntos:

**A** (-1,38 ; -1,1) , **B** (1,31 ; 1,00) , **C** (2,76 ; -0,55) y **D** (3,31 ; 0,93) se obtiene:



## Curva de Bézier de grado n-ésimo:

Considerando los puntos

$$P_0 = (x_0, y_0), P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2) \dots P_n = (x_n, y_n)$$

Es posible obtener una curva de Bézier de este conjunto de puntos por medio de la siguiente expresión vectorial:

$$\overrightarrow{OG} = \sum_{i=0}^n C_n^i (1-t)^{n-i} t^i \overrightarrow{OP_i} \quad (2)$$

donde  $t \in [0; 1]$

Obsérvese que cuando  $t = 0$  se tiene  $G(x, y) = P_0(x_0, y_0)$  y que cuando  $t = 1$ , se tiene  $G(x, y) = P_n(x_n, y_n)$ , así que la curva de Bézier empieza en el punto  $P_0(x_0, y_0)$  y termina en el punto  $P_n(x_n, y_n)$ .

## Superficies de Bézier:

Una deducción natural es la generalización del concepto de curvas de Bézier a curvas y superficies en  $\mathbb{R}^3$ . Esto es posible de realizar fácilmente por medio de la utilización de la igualdad (2) y la parametrización de las ecuaciones de curvas y superficies.

## Conclusión

En la búsqueda de contextualizar y dar significado a los aprendizajes en matemática, de modo tal que nuestros alumnos sientan atracción por la asignatura, generando con ello la motivación por los aprendizajes y creando un ambiente propicio para el desarrollo de habilidades tales como el análisis, generalización y resolución de problemas, todo lo anterior enmarcado con la incorporación de las nuevas tecnologías (en particular aquellas portables) es interesante el mostrar a nuestros alumnos una aplicación directa de la matemática en un campo de gran actualidad y que suscita, naturalmente, el interés de ellos.

## Bibliografía:

1. Alberich, Jordi: "Las flores de Bézier. Elasticidad e inestabilidad en el grafismo digital interactivo" [www.uoc.edu/artnodes/esp/art/pdf/alberich1204.pdf](http://www.uoc.edu/artnodes/esp/art/pdf/alberich1204.pdf)
2. Ramírez, Francisco: "Diseño óptimo de elementos mecánicos crecimiento biológico" Prog. Doctorado de Ing. de Materiales, FIME-UANL, México.
3. Monterde, Juan: "Arquitectura y Matemáticas" Depto. de Geometría y Topología. Univ. De Valencia

## Conozca el editor



María del Pilar Morfin Heras es de nacionalidad Mexicana y es ingeniero y maestra en matemática educativa. Sus estudios de ingeniería electrónica los realizó en los años 1971-76 en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente (ITESO) y su maestría en matemática educativa en los años 1976-79 en el

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV).

Su labor docente la desarrolló en varias universidades e institutos de formación superior. Se desempeña como docente en la Universidad de Guadalajara desde el año 1981 a la fecha. En la Facultad de ciencias y en las licenciaturas de física y matemáticas imparte cursos como geometría euclidiana, cálculo, algebra Lineal, topología, y más. Su labor docente se extiende a cursos en la maestría abierta en matemática educativa que ha ofrecido el CINVESTAV. Además da cursos en el centro regional de Tecnología Educativa, en la licenciatura del programa nacional de formación y actualización de profesores de matemáticas y posteriormente en la Dirección de Desarrollo Académico en la maestría en matemática educativa. Maestra en el centro universitario de ciencias exactas e ingeniería, impartiendo cursos de geometría euclidiana y en la maestría en enseñanza de la

matemática con los cursos de historia de la geometría de 1991 a 2000. Desde 1994 a la fecha, maestra en la preparatoria regional de Chapala, impartiendo cursos y talleres de matemáticas.

La profesora María Pilar Morfin se ha desempeñado como coordinadora del área de matemáticas en lo que ahora es el sistema de Educación Media Superior de la Universidad de Guadalajara. Coordinadora de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas en la Universidad de Guadalajara. Coordinadora de la Maestría Abierta en Matemática Educativa que ofreció el CINVESTAV en la U. de Guadalajara.

Miembro de la Junta Directiva de la Sociedad Matemática Mexicana en el periodo 1997-1999

Integrante del Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de 1996 a 2004 y miembro del tribunal calificador de la Olimpiada Internacional de Matemáticas y de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Coordinadora del grupo T<sup>3</sup> en Guadalajara desde el 2001 a la fecha, promoviendo el desarrollo de un seminario entre los integrantes del grupo e impartiendo talleres y conferencias en diferentes foros, sobre el uso de las calculadoras graficadoras y de la tecnología, en el aprendizaje de las matemáticas.

## Felicitaciones para nuestro editor



Nuestro editor recibiendo el premio Euclides junto al rector de la universidad Sr. Pedro Rosso y el Sr. Juan Olmedo de la fundación AES Gener SA

La Universidad Católica de Chile otorga cada dos años el "Premio Euclides" al profesor de Educación Media (secundaria) de todo el país, que se haya destacado tanto por su dedicación ejemplar a la disciplina de las matemáticas como por su innovación en los métodos de enseñanza e incentivo a sus alumnos.

El jurado del Premio Euclides otorgó la distinción al profesor Marco Antonio Barrales Venegas, profesor del Colegio Alemán de Concepción y Universidad San Sebastián, en reconocimiento "a sus innovaciones y sobresalientes aportes a la enseñanza de la matemática, por su destacada trayectoria académica y su gestión docente que generosamente comparte con su colegio y alumnos".

El profesor Marco Antonio Barrales tiene una trayectoria impresionante. Sus actividades van desde las comunes guías de ejercicios hasta el diseño de problemas reales para solucionar mediante el uso de calculadoras. Constantemente ha estado perfeccionándose tanto en Chile como en el extranjero y creando instancias organizativas donde comparte sus descubrimientos y experiencias con profesores y alumnos. Su constante búsqueda de cómo enseñar matemática, se ha concretizado en variados trabajos sobre Enseñanza y Aprendizaje utilizando herramientas tecnológicas que ha presentado en congresos de educación tanto nacionales como extranjeros y publicaciones en revistas de matemática.