

7ta. Edición - 2005

## En esta edición

**La danza de las rectas**  
*Dr. Eduardo Mancera Martínez* .....1

**Editorial** .....2

**¿Una Calculadora o Un Recolector de datos GRATIS!** .....2

**¿Cómo puedo hacer?**  
*Marco Barrales* .....6

**Buscar una transformación**  
*Michel Carral* .....6

**La Exploración de una ecuación diferencial con la ayuda de Voyage™ 200 y el CBL™: un trabajo experimental**  
*Rene Saucedo Silva* .....10

**La TI-84 en la solución gráfica de una situación problemática**  
*Gerardo López Silva* .....12

**Programación en geometría**  
*Luis Ibacache Salazar* .....13

**Lugares geométricos con Cabri Junior™ en la TI-84 Plus**  
*Grupo de Geometría. Universidad San Sebastián y Colegio Alemán de Concepción. Chile* .....14

**El número Áureo en el siglo XXI. ¿Cómo representar a  $\Phi$  con la ayuda de la Voyage™ 200?**  
*Carla Muñoz Azócar*  
*Nicole Morales Maragaño* .....17

**Conozca el editor** .....19

**Internet y eventos educacionales** ....20

# La danza de las rectas.

Dr. Eduardo Mancera Martínez – *eduardo\_mancera@prodigy.net.mx*

## Introducción

El uso educativo de dispositivos logrados por el avance tecnológico suele ser un punto de partida para explorar nuevas posibilidades orientadas a la construcción de conocimientos. Pero, también son útiles para revalorar lo que ya se sabe o profundizar en temas conocidos. En efecto, con el empleo de algunos medios, los contenidos pueden analizarse desde diferentes perspectivas, utilizando tiempos más cortos y empleando diversas representaciones. Entre este tipo de medios están las calculadoras gráficas.

Este documento se ocupa de mostrar como es posible obtener provecho del uso de una calculadora gráfica como la Voyage™ 200, para explorar relaciones entre operaciones entre rectas y algunas cónicas, contenidos generalmente abordados en forma independiente. Para muchos las rectas y cónicas son entidades no relacionadas, en cierto modo “vecinas”, pero de aquellas “que no se hablan”

Sin embargo, rectas y cónicas o en general polinomios y funciones racionales están muy ligados y pertenecen a un tronco común. A partir de las rectas es posible “construir” y explicar algunas propiedades de funciones cuyas gráficas se relacionan con cónicas o polinomios. Se trata de hacer una especie de “danza” con las rectas.

Con las calculadoras gráficas podemos aprender a bailar con las rectas, a partir de movimientos o transformaciones sencillas en el plano, con las cuales se puede dar vueltas, moverlas horizontal o verticalmente. Las afirmaciones que se plantean en lo que sigue, están apoyadas en resultados obtenidos en el trabajo de campo de un estudio sobre el desarrollo del pensamiento gráfico de alumnos que inician sus estudios de educación superior, auspiciado por la Universidad Iberoamericana de la Ciudad de México.

Se decidió presentar este artículo en un formato de difusión para centrar la atención en los aspectos prácticos y pedagógicos, lo cual es parte esencial de los propósitos de la revista.

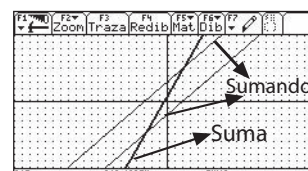
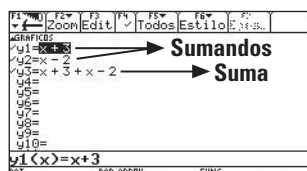
Se parte de la idea de que se conocen las representaciones algebraicas de las rectas, en particular la forma canónica:  $f(x) = mx + b$ , y la forma de graficarlas a partir de dichas expresiones. Además de conocer la forma de expresar algebraicamente algunos movimientos de las gráficas. Por ejemplo, dada  $f(x)$  los movimientos horizontales corresponden a  $f(x-h)$ , los verticales a  $f(x)+k$ , reflejar respecto al eje  $X$  corresponde con  $-f(x)$  y con respecto al eje  $Y$  es  $f(-x)$ .

## Suma y diferencia de rectas

Para familiarizarnos con las operaciones de rectas conviene considerar la adición y substracción de funciones lineales.

Por ejemplo, si sumamos las rectas  $f(x) = x + 3$  y  $g(x) = x - 2$ , tenemos como resultado otra recta:  $(f+g)(x) = 2x + 1$ , o simplemente:  $h(x) = 2x + 1$

En la calculadora podemos escribir las ecuaciones y conocer desde varias perspectivas el resultado de sumarlas:



X	Y1	Y2	Y3
-3	0	-5	-5
-2	1	-4	-3
-1	2	-3	-1
0	3	-2	1
1	4	-1	3
2	5	0	5
3	6	1	7
4	7	2	9

Continúa en la página 3

Estimados colegas de Latinoamérica, sin lugar a dudas que hoy ya hay consenso entre los educadores, en que las condiciones en que se realiza el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las ciencias ha cambiado y ciertamente que seguirá cambiando. Hoy se están elaborando nuevos planes de enseñanza en todos los niveles, las editoriales están incorporando en sus textos de estudio material innovador que apuntan a los nuevos planes curriculares y por otra parte las herramientas educativas relativas al hardware y al software ofrecen hoy al educador y al educando un elemento con mayor grado de amistad y versatilidad para su uso y aplicación.

En nuestros países la enseñanza y el aprendizaje tradicional se cuestiona cada vez mas por parte de todos los actores del sistema, invitando a aprender mas que a ser instruido. Conceptos como aprendizaje activo, aprendizaje orientado a descubrir, aprendizaje para resolver problemas, enseñanza de aprender a aprender, enseñanza y aprendizaje interactivo y dinámico, son todos estos importantes desafíos que ciertamente invitamos a nuestros educadores de Latinoamérica a la reflexión. En el marco anteriormente descrito, la sugerencia de la capacitación y el perfeccionamiento por parte de cada uno de los educadores cobra cada vez mas fuerza, así como también consenso en el sistema educacional y que creemos que los educadores asumirán mas temprano que tarde.

Nos es muy grato presentarles una nueva versión de la revista Innovaciones Educativas, nuestra séptima edición, pretende poner en manos de los profesores, diferentes formas de abordar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias con tecnología Texas Instruments. En esta edición se abordan temas relativos a rectas y gráficas, geometría y transformaciones, ecuaciones diferenciales con CBL, programación, número de oro, y lugares geométricos con Cabri Jr. En la sección ¿Cómo puedo hacerlo? damos respuesta a una consulta muy reiterada sobre cómo actualizar el sistema operativo y bajar nuevas aplicaciones a sus calculadoras. En la sección "Conozca al editor" presentamos la trayectoria y los aportes a la enseñanza de las matemáticas del editor Juan Melin Conejeros. Además compartimos con ustedes algunas direcciones en la web donde podrán encontrar material e ideas para sus clases y de eventos que se desarrollarán en nuestro continente.

Estamos muy contentos por la gran cantidad de artículos que llegan a nuestras manos, lo cual hace la tarea más difícil, pero a su vez mas motivadora. Mantenemos nuestra invitación a compartir con nuestros lectores sus ideas y experiencias en el aula con la tecnología de Texas Instruments en las matemáticas y las ciencias.

## Consejo Editorial

Dr. EDISON DE FARIA CAMPOS  
Universidad de Costa Rica  
Fax: (506) 240 6540  
edefaria@cariari.urc.ac.cr

Dr. EDUARDO MANCERA MARTÍNEZ  
Asociación Nacional de Profesores  
de Matemática de México  
Fax: +52 (55) 5555-3484  
eduardo\_mancera@prodigy.net.mx

Lic. MARCO ANTONIO BARRALES VENEGAS  
Colegio Alemán de Concepción  
Universidad San Sebastián. Concepción, Chile  
Fax: +56 (41) 799085  
mbarrale@dsc.cl

Dr. JUAN MELÍN CONEJEROS  
Texas Instruments Inc.  
Málaga 115, Of. 904. Las Condes. Santiago, Chile.  
Fax: +56 (2) 321-3119  
jmelin@ti.com

Nota: Si tiene una actividad o artículo que quiera compartir y publicar en ésta revista, contacte a uno de los editores.

## ¡Una Calculadora o un Recolector de datos GRATIS\*!



**Ayude a otros profesores a incorporar la tecnología a sus clases. Envíe un artículo a nuestros editores y si es publicado recibirá una calculadora de su elección o un recolector de datos ¡gratis!**

### Perfil de los Artículos o Actividades

Se intenta publicar artículos o actividades que:

- despierten la curiosidad por la tecnología.
- presenten una novedad de cómo resolver un problema.
- el profesor perciba las ventajas de resolver algo con la calculadora.
- motiven al profesor a comenzar a utilizar la tecnología en sus clases.
- presenten una forma inteligente, creativa, amistosa de cómo resolver un problema utilizando las herramientas de Texas Instruments.

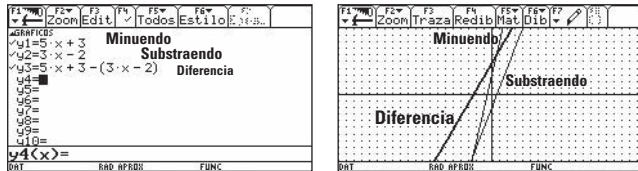
### ¿Cómo me deben de enviar Artículos o Actividades de los autores?

- Los trabajos se reciben por correo electrónico en un archivo Word en fuente Arial de 12 puntos.
- Tamaño de no más de 3 páginas tamaño carta, salvo excepciones.
- Debe tener un párrafo de introducción.
- Las pantallitas, gráficas o fotografías se solicitan en archivos separados. Las pantallitas se necesitan en formato tif con un mínimo de 400 dpi. Las gráficas en formato jpeg o gif y las fotografías deben de ser en alta resolución en formato eps o jpeg.

\* Una calculadora o recolector de datos (CBR 2™ o CBL 2™) por artículo.

La calculadora gráfica permite transitar, en la misma situación, de un lenguaje a otro, del algebraico (a partir de expresiones algebraicas), al geométrico (con las gráficas) y al aritmético (basado en las tabulaciones).

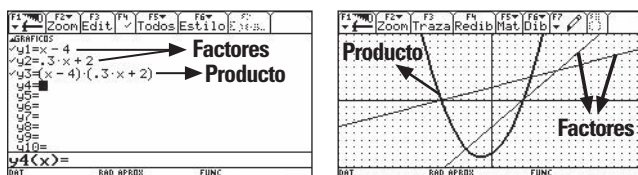
De la misma forma se puede hablar de la diferencia:



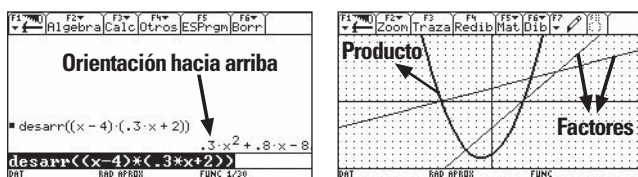
## Multiplicando de dos rectas

Otra operación interesante es la multiplicación de rectas.

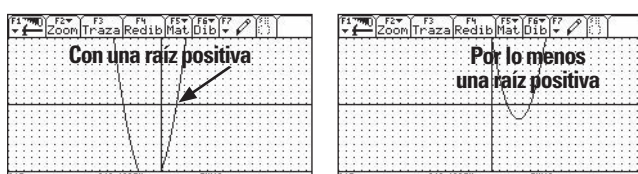
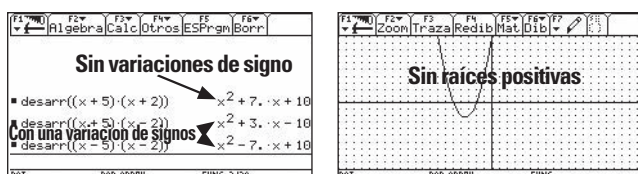
Al multiplicar dos rectas no paralelas a los ejes, obtenemos parábolas, consideremos la siguiente multiplicación:



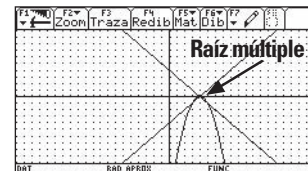
Cuando las rectas cortan al eje X en dos puntos distintos la situación es similar, como es natural el signo del producto de las pendientes definirá la orientación de la parábola (hacia arriba o hacia abajo).



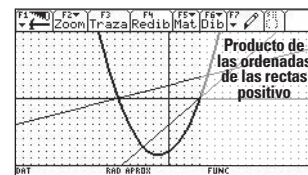
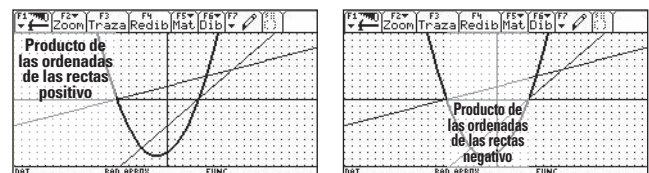
Este tipo de situaciones, al analizarlas, permite hacer conjeturas relacionadas con la regla de los signos de Descartes, pues se pueden multiplicar rectas que corten en distintas partes al eje de las abscisas:



También se le puede dar sentido a las raíces múltiples, como cuando tenemos dos rectas que se cortan en un punto del eje de las abscisas:



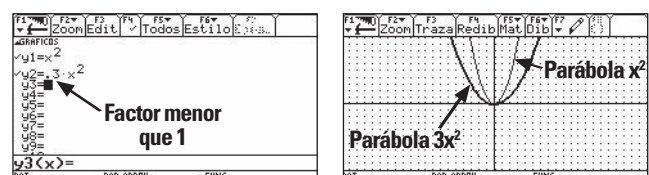
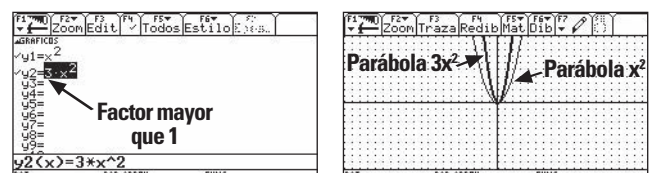
Nótese que la gráfica nos dice las regiones donde el producto de las ordenadas de los puntos sobre las rectas es positivo o negativo:



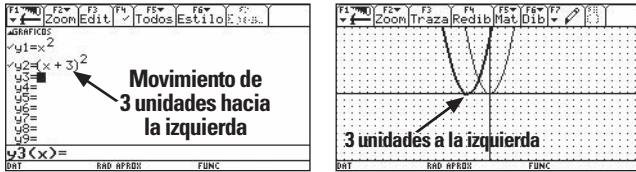
Esta situación se puede constatar en las tablas generadas por las rectas y la parábola.

Cuando la parábola no tiene raíces reales no se podrá expresar como producto de rectas. Esto obliga a enfocar el problema de otra forma.

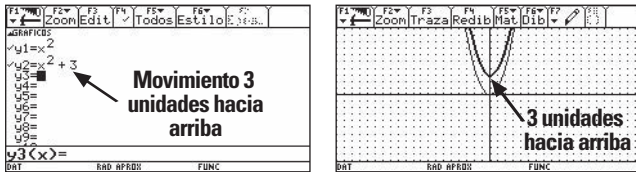
Consideremos la parábola más sencilla:  $y=x^2$ . Si se multiplica al término cuadrático por un número mayor que 1 se cierra la parábola, si el número es menor que 1 se abre.



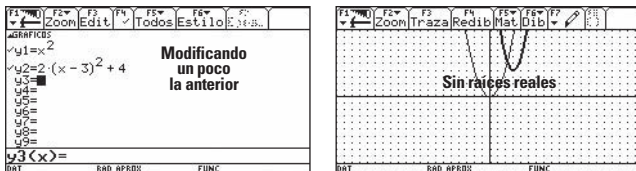
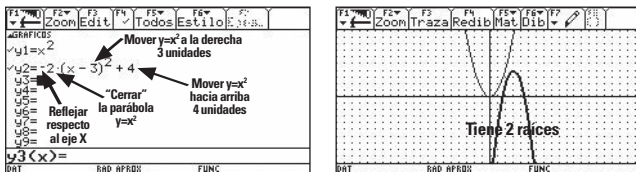
Podemos mover a la izquierda o derecha a la parábola  $y=x^2$ :



Además podemos mover arriba o abajo a la parábola  $y=x^2$ :



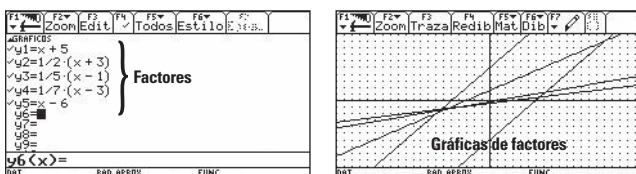
Combinando todos los movimientos podemos describir a cualquier parábola, incluso aquellas sin raíces reales.



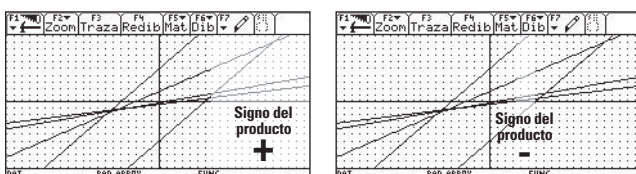
## Multiplicando de más de dos factores que son rectas o parábolas

Con este tipo de procedimientos se pueden explorar algunos polinomios para entender su gráfica a partir de lo que se expresa en su expresión algebraica con o sin factorizaciones.

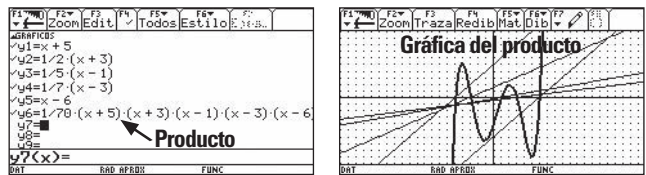
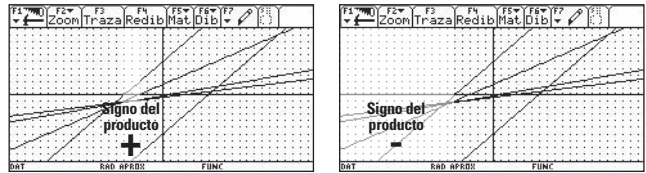
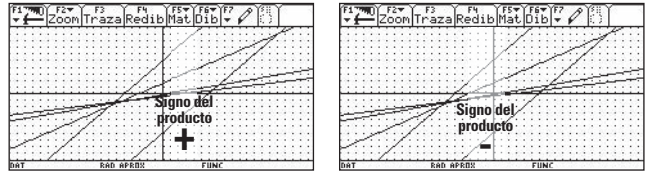
Por ejemplo, consideremos un producto de varias rectas (lo cual puede considerarse como productos de rectas y parábolas, dado que el producto de dos rectas dará una parábola):



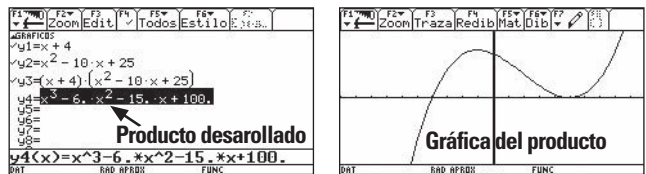
Es posible analizar el signo del producto para estimar la forma gráfica del producto:



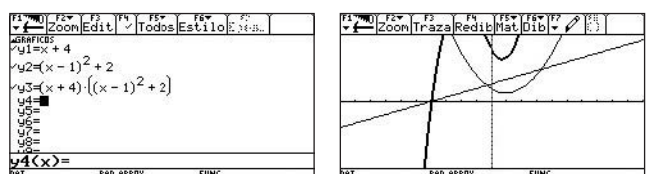
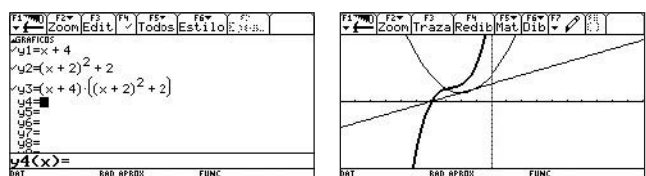
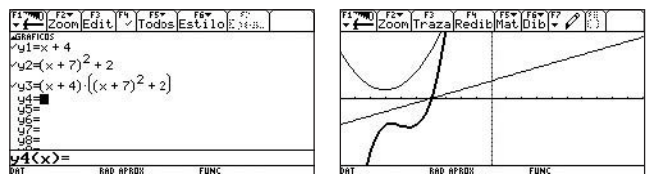
El resultado del producto es:



Análogamente podemos proceder cuando hay raíces múltiples:

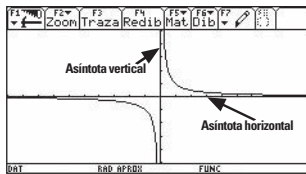


Es posible analizar la formación de puntos de inflexión a partir de multiplicar una recta y una parábola sin raíces reales.



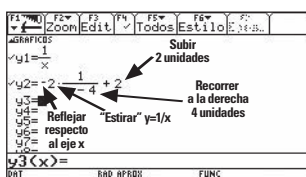
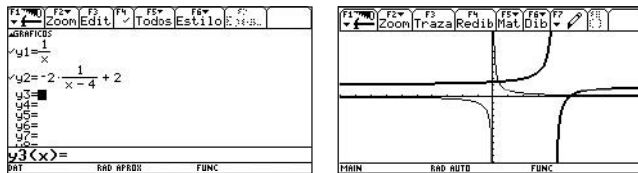
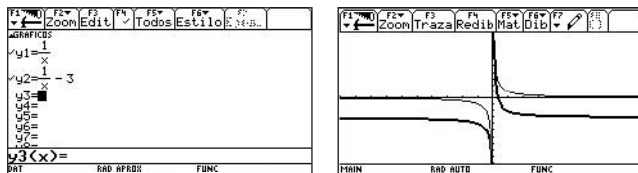
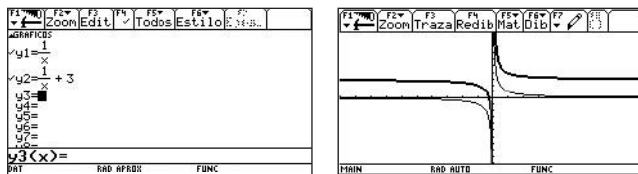
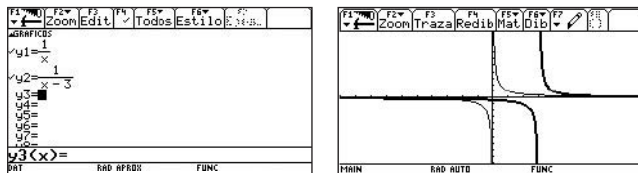
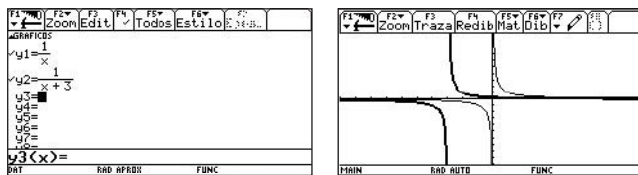
## División de rectas

En esta breve exposición del manejo de las rectas, concluiremos con la división de rectas, para ello consideremos el caso más sencillo, una hipérbola equilátera:  $y = \frac{1}{x}$

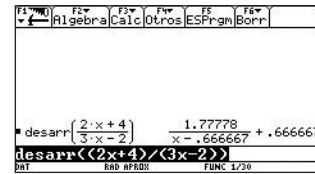


Esta se puede multiplicar por un número mayor o menor que 1, mover a la derecha o la izquierda, subir o bajar.

Se pueden combinar los movimientos o transformaciones:



Es importante notar que el cociente de dos rectas son movimientos de la hipérbola equilátera:



## Comentarios finales

Hay muchos aspectos que se quedan pendientes pero posteriormente se tratarán en otras oportunidades, queda al lector analizar el papel de las rectas en el análisis de las hipérbolas equiláteras, lo que se obtendría al dividir rectas y parábolas, entre otros temas.

El tratamiento de las funciones como el que se sugiere ha tenido muchas ventajas. En principio permite dar sentido a las literales y coeficientes de ciertas funciones, los coeficientes y signos de una expresión algebraica adquieren significado, además de que algunos métodos o imágenes utilizadas en los cursos de cálculo para ver indeterminaciones, límites y continuidad, también pueden ser ilustradas ampliamente, no solamente con funciones "trucadas", sino también con funciones cuyos coeficientes no son solamente números enteros.

La habilidad de estimación adquiere aquí otra connotación particular, desde el momento que es posible hablar de una estimación espacial, relacionada con las formas de gráficas de funciones. También es posible presentar gráficas a los estudiantes y solicitarles que asignen expresiones algebraicas de funciones que tengan gráficas similares, es decir hablamos de estimaciones sobre representaciones algebraicas.

Los estudiantes tienen la oportunidad de notar como son los comportamientos asintóticos y algunos métodos para el cálculo de límites o de integración son claros como el hecho de relacionar a las funciones racionales con adiciones de movimientos de hipérbolas equiláteras.

Hay muchos tipos de operaciones entre rectas o entre rectas y parábolas o polinomios que merecen tratamiento aparte, pero el alcance del presente artículo no permite abarcar todo, queda solamente esto como muestra de las amplias posibilidades para el aprendizaje de los maestros y los estudiantes a partir del análisis de casos muy sencillos y a partir de objetos poco complicados como la recta.

El estudiante se peca constantemente de la jerarquía de las operaciones y la necesidad del uso de paréntesis, así mismo del uso de cantidades negativas, en alguna forma se corrigen ciertos errores algebraicos, en la medida que se involucra al estudiante con el análisis de varias combinaciones de rectas.

Solamente queda invitar al lector que deje de ser un admirador de la "danza de las rectas", para tomar parte activa en el baile y dance con las funciones lineales para obtener resultados interesantes e incluso sorprendentes.

### Bibliografía:

Mancera E.; *Notas del curso Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía*; Universidad Iberoamericana, México, 2004.

Rees, P.; *Geometría Analítica*; Reverté, España, 1970.

Sánchez - Serrano A.; *Representación de curvas problemas y aplicaciones*; Escuela Superior de Ingenieros Aeronáuticos, España, 1962.

Shilov G. E.; *Cómo construir gráficas*; Temas Matemáticos, Limusa, México, 1976

## ¿Cómo puedo hacer?

Marco Barrales – mbarrale@dsc.cl

### (1) ¿Qué son las Apps?

Las aplicaciones de software para calculadora (Apps) son programas que se pueden descargar en las calculadoras con tecnología Flash de TI, igual que el software que se descarga en un computador.



La tecnología Flash de las calculadoras TI, le permiten hacer actualizaciones a partir de su computador bajando las últimas versiones del sistema operativo (OS) o bien aplicaciones que quiere incorporar en su calculadora para ampliar su funcionalidad en temas específicos. Puede elegir entre una gran variedad de Apps y personalizar su calculadora a su currículum (Biología, Química, Ciencias Sociales, Física, etc.).

### (2) ¿Sabe que puede conectar su calculadora TI a otra calculadora TI?

Puede compartir datos con un cable de unidad a unidad.

1. En primer lugar, conecte las dos calculadoras con el cable.
2. Pulse "2nd VAR- LINK" en cada unidad.
3. En la calculadora receptora, pulse "F3" y seleccione "Receive".
4. En la línea de estado de la unidad receptora aparecen el mensaje "VAR-LINK: WAITING TO RECEIVE" y el indicador "BUSY".
5. En la calculadora de origen, seleccione las variables, carpetas o Apps Flash que desee enviar. Pulse "F3" y después seleccione "Send".
6. Durante la transmisión aparece una barra de progreso en la línea de estado de la unidad receptora. Una vez terminada la transmisión, se actualiza la pantalla VAR-LINK en la unidad receptora.

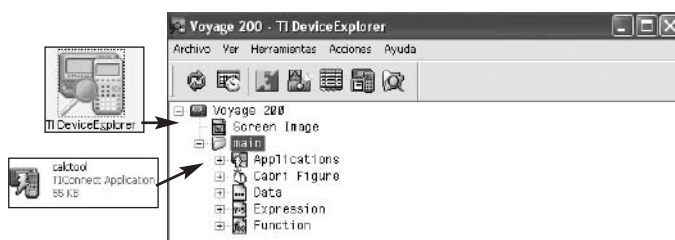
### (3) ¿Cómo puedo colocar una nueva aplicación o actualizar el sistema operativo (OS) en mi calculadora?

Pasos:

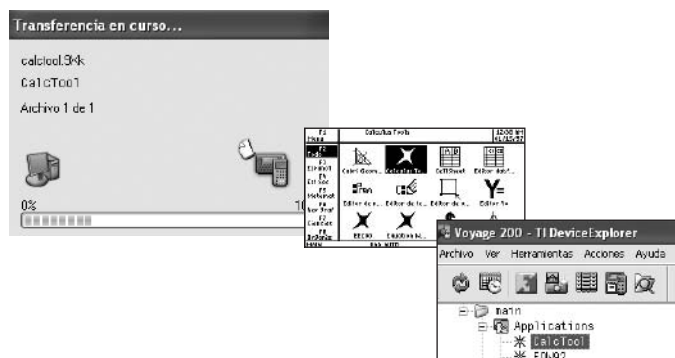
- a) Cargar el programa TI Connect™  **Instalar TI Connect™**

Dirección para bajarlo: <http://education.ti.com/us/product/accessory/connectivity/download/download.html>

- b) Asegúrese de que el computador está conectado físicamente a la calculadora mediante un cable TI Connectivity (Calculadora ↔ cable USB ↔ Computador)
- c) Visitar la página de productos y Busque la Apps o OS que le interesa, haga clic en "download" y guárdela en el escritorio. <http://education.ti.com/apps>
- d) Abrir el programa TI Connect y seleccionar TI DeviceExplorer

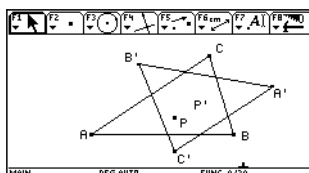


- e) Arrastrar de la carpeta donde se encuentra la aplicación al icono de Aplicación



La determinación, de una transformación no es, en general, algo muy simple. En este trabajo el matemático trata de saber si una transformación tiene invariante(s); en ese caso le permite saber si la transformación existe o no, y en el caso positivo le permite deducir algunas propiedades. Si el matemático lo necesita, tratará después de expresarla. Por ejemplo los casos de congruencias o de semejanzas son invariantes que permiten decir si una isometría o una similitud existe o no existe entre dos triángulos. Una herramienta como Cabri en la computadora y en la Voyage™ 200 (un software interactivo de geometría) es una buena ayuda para este tipo de trabajo como vamos a verlo con el problema siguiente.

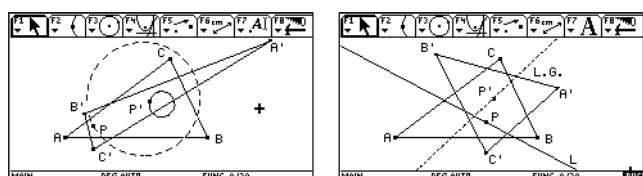
**Problema:** Sean un triángulo ABC y un punto P. Consideramos A', B', C' los simétricos axiales del punto P respectivamente a los lados BC, CA, AB y P' el centro de gravedad del triángulo A'B'C'. Determinar la transformación que al punto P asocia el punto P'.



Un software como Cabri facilita el trabajo de observación, eso permite de probar y reflexionar, ("ensayo y error"); por eso fabricaremos dos macros que llamaremos "centro" y "centro-tri", que a un triángulo ABC y un punto P dan, respectivamente, el centro de gravedad del triángulo ABC y el triángulo A'B'C' con su centro de gravedad, el centro de gravedad siendo de un color distinto del punto P para facilitar la observación (Cabri computadora). Eso nos permitirá de experimentar sobre varios triángulos sin necesidad de rehacer la construcción.

Utilizando la macro *centro* sobre un triángulo ABC con un punto P, moviendo este punto es muy difícil de tener una idea sobre la transformación. Si redefinimos el punto P como un punto sobre una recta o sobre un círculo y si obtenemos el lugar geométrico del punto P' cuando P recorre la recta, o el círculo podemos observar que este lugar es una recta o un círculo. Para una confirmación cuando el punto P recorre una recta, sea una recta definida por dos puntos cualquiera sobre el lugar geométrico del punto P'. Aplicamos la función "pertenece" al punto P' y a esa recta, Cabri nos dice "Este punto está sobre el objeto". Cuando P recorre un círculo procedemos de la misma manera con un círculo definido por tres puntos sobre el lugar geométrico.

Si modificamos el triángulo ABC, o si movemos la recta o el círculo tenemos siempre las mismas respuestas.



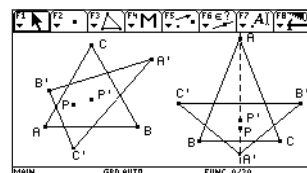
Estas experimentaciones nos permiten pensar que la transformación que buscamos es una similitud; si necesitamos tener más confianza, podemos buscar la imagen de un ángulo, medirlo y medir el ángulo imagen. De esta manera verificamos los invariantes de una similitud.

## Determinación de la transformación

Aplicando la macro *centro* a un triángulo ABC y un punto P, moviendo este punto, tenemos la certeza que la transformación que buscamos tiene un (¿un solo?) punto fijo. Para conocer la transformación necesitamos determinar este punto que llamaremos O.

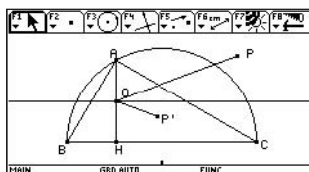
En el caso que este punto sea un punto conocido, y para facilitar nuestra reflexión, vamos tomar triángulos particulares. Si tomamos un triángulo *equilátero* vemos que la imagen de cualquier punto P es el centro de gravedad del triángulo: la transformación degenera, y la transformación es constante.

Tomamos ABC un triángulo *isósceles*. Una primera observación visual nos convence que el punto fijo está sobre la mediatriz de la base BC, lo que encontramos normal por simetría. Podemos confirmarlo con Cabri aplicando la macro *centro* a un punto P sobre la mediatriz de BC. Cabri nos dice que el punto P' esta sobre la mediatriz. Si hacemos correr el punto P vemos que tenemos una inversión de orden entre los puntos P y P'. Por continuidad existe una posición en la cual los puntos P y P' se superponen: es la posición del punto fijo. Pero, modificando el triángulo ABC, tenemos la certeza que el punto O no es un punto que conocemos.



Tomamos el triángulo ABC *rectángulo*; para utilizar la dinámica del software sea el vértice A sobre una semi-circunferencia de diámetro BC. Si utilizamos la macro *centro* podemos tener una primera idea sobre la posición del punto O, pero es mas conveniente de utilizar la macro *centro-tri*. Podemos observar que el lado B'C' del triángulo A'B'C' pasa por el punto A. En efecto pasamos del punto C' al punto P por una simetría axial de eje AB, y del punto P al punto B' por una simetría axial de eje AC; pasamos del punto C' al punto B' por una rotación de centro A y de ángulo igual a dos veces el ángulo (BAC) que es recto. Es decir pasamos del punto C' al punto B' por una simetría de centro A: el punto A es el punto medio del segmento B'C' y A'A es mediana del triángulo A'B'C'.

Como la recta definida por el punto fijo  $O$  y  $O_1$ , su simétrico axial de eje  $BC$ , es perpendicular al lado  $BC$  los puntos  $A$ ,  $O$ ,  $O_1$  tienen que ser colineales: el punto  $O$  se encuentra sobre la altura  $AH$  del triángulo  $ABC$  a un tercio de la base  $B'C'$  del punto  $O_1$ . Lo que hace que el punto  $O$  es el punto medio de  $AH$ .



Si miramos las posiciones de un punto genérico  $P$ , de su imagen  $P'$  y del punto  $O$ , es claro que no tenemos una homotecia, si movemos el punto  $P$  se puede observar las variaciones del punto  $P'$ . La bisectriz del ángulo  $POP'$  parece ser paralela a la base  $BC$  para cualquier punto  $P$ . Verificación de esta hipótesis:

Trazamos por el punto  $O$  la paralela  $(d)$  a la base  $BC$ ; sea  $P''$  el simétrico axial de  $P'$  respectivamente a  $(d)$ . La función "pertenece" de Cabri afirma que el punto  $P''$  está sobre el segmento  $OP$ , lo que confirma nuestra observación.

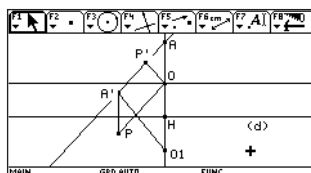
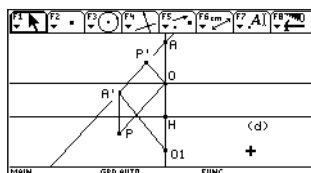
Calculamos la razón entre  $OP'$  y  $OP$  (podemos hacerlo también entre dos puntos  $P, Q$  y sus imágenes  $P', Q'$ ), encontramos  $0,333\dots$ , es decir  $\frac{1}{3}$ , para cualquier triángulo rectángulo.

Llegamos a la conclusión que la transformación que buscamos para un triángulo rectángulo  $ABC$  es la similitud inversa de centro el punto medio  $O$  de la altura  $AH$ , de eje la paralela a la base  $BC$  pasando por el punto  $O$  y de razón  $\frac{1}{3}$ ; es el producto de una homotecia y de una simetría.

*Nota:* La demostración en base a la geometría sintética que podemos dar no nos entrega ninguna luz sobre el porque. La dejamos a la atención del lector.

Falta probar que la razón es  $\frac{1}{3}$  y que el eje de simetría pasa por  $O$ , punto medio de la altura y es paralelo a la base  $BC$ .

Sean  $P$  un punto genérico,  $A'B'C'$  el triángulo asociado dados por los simétricos y  $O_1$  el simétrico del punto fijo  $O$  respectivamente a la base  $BC$  (recta  $(d)$ ). Por simetría (de la recta  $(d)$ ) el segmento  $A'O_1$  es igual al segmento  $OP$ , y por Tales es igual a tres veces  $OP'$  ( $P'$  es situado a  $1/3$  a partir del punto  $A$ )



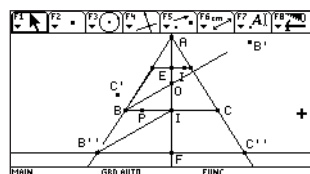
La razón de la transformación es igual a  $\frac{OP'}{OP}$  o sea a  $\frac{1}{3}$ .

La bisectriz del ángulo  $P'OP$  es paralela a la recta  $(d)$ : lo probamos por simetría, o trazando la paralela pasando por  $P'$  a  $AH$  determinamos un triángulo isósceles cuya la bisectriz del ángulo opuesto a la base es perpendicular a  $AH$ . Entonces el eje de simetría es la recta pasando por  $O$  y paralela a  $BC$ .

Esa demostración no nos aclara para un triángulo cualquiera o isósceles, pero lo que deducimos de nuestras experimentaciones nos permite entender un poco la situación y deducir lo siguiente: el punto fijo se encuentra sobre la perpendicular a la base  $BC$ , cuando esa perpendicular pasa por el punto medio de  $B'C'$ , siendo  $B', C'$  los puntos simétricos del punto fijo respectivamente a los lados  $AC$  y  $AB$ .

Volvemos a un triángulo isósceles  $ABC$ . Sea  $I$  el punto medio de  $BC$ ; Podemos agrandar por una homotecia de centro  $A$  el triángulo  $ABC$  en un triángulo  $AB''C''$  de modo que el punto  $I$  sea el punto fijo de este triángulo:

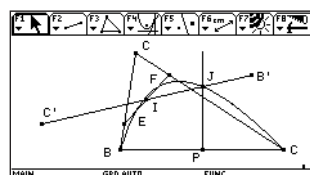
Consideramos un punto  $P$  sobre el lado  $BC$ , y sea  $B', C'$  sus simétricos axiales respectivamente a  $AC$  y  $AB$ . El lugar geométrico del punto medio de  $B'C'$  cuando  $P$  recorre el lado  $BC$  es un segmento que corta la mediatriz de  $BC$  en un punto  $E$ ; notamos  $F$  el simétrico axial de  $E$  respectivamente a  $BC$ . La paralela a  $BC$  pasando por  $F$  corta las rectas  $AB$  y  $AC$  en  $B''$  y  $C''$ . El triángulo  $AB''C''$  es el triángulo buscado: el punto fijo de la transformación para este triángulo es el punto  $I$ .



Por Tales el punto fijo  $O$  del triángulo  $ABC$  se encuentra a la intersección de la paralela a  $B''I$  pasando por el punto  $B$ . Podemos ver de la misma manera que para un triángulo rectángulo que la transformación es una similitud inversa de eje paralelo a la base  $BC$  si el ángulo opuesto a la base es mayor que  $60^\circ$ , y es la mediatriz de la base si el ángulo opuesto a la base menor que  $60^\circ$ ; la razón de la homotecia depende del triángulo isósceles.

Tomamos  $ABC$  un triángulo cualquiera y hacemos la síntesis de nuestras observaciones y de nuestras experimentaciones:

Sea un punto  $P$  sobre la base de  $BC$ , y  $B', C'$  sus simétricos respectivamente a los lados  $AC$  y  $AB$ . Notamos  $I$  el punto medio de  $B'C'$ , y  $J$  el punto de intersección de la perpendicular a  $BC$  pasando por  $P$  y del segmento  $B'C'$ . Pedimos a Cabri los lugares geométricos de los puntos  $I$  y  $J$  cuando el punto  $P$  recorre el lado  $BC$ . Esos lugares se cortan en un o dos puntos  $E$  y  $F$  (depende del triángulo  $ABC$ ).



Uno de esos dos puntos va tener el papel del punto  $E$  del caso de un triángulo isósceles. Falta, como en el caso precedente, determinar un triángulo  $AB''C''$  homotético del triángulo  $ABC$  y hacer un trabajo semejante para encontrar el punto fijo.

Sea el punto  $P$  correspondiente al punto  $E$  o al punto  $F$



(solamente a uno de los dos puntos, que podemos determinar utilizando la dinámica del software con un punto libre y su imagen por la transformación); notamos  $E_1$  el simétrico de E respectivamente a la recta BC. Trazar la paralela a BC pasando por  $E_1$ : determinamos el triángulo  $AB''C''$ . El punto fijo de la transformación para este triángulo es el punto P. El punto de intersección de la paralela a  $B''P$  pasando por el punto B con la recta PE es el punto fijo de la transformación por el triángulo ABC.

Pero Cabri no hace la intersección de dos lugares geométricos. El lugar geométrico del punto medio I de  $B'C'$  es un segmento; trazamos una recta (d) definida por dos puntos de este lugar. Podemos tener una dificultad para el lugar geométrico del punto J; para intentar de levantar esta dificultad definimos una cónica por cinco puntos sobre este lugar. Si movemos los puntos, la cónica queda fija: podemos pensar que el lugar geométrico es una hipérbola como afirma Cabri. En este caso la intersección de esos dos lugares geométricos da el punto E buscado y podemos determinar el punto fijo para el triángulo ABC.

La determinación del eje de simetría de la similitud inversa puede hacerse de la siguiente manera:

Sea un punto P y su imagen  $P'$ , trazamos la bisectriz del ángulo  $POP'$ . Si movemos el punto P la bisectriz queda fija. Es el eje de simetría de la transformación.

**Validación:** Sea Q otro punto genérico y  $Q'$  su imagen, y H la homotecia de centro O de razón  $\frac{OP'}{OP}$ . Notamos  $Q''$  el homotético de Q. Verificar con Cabri que la bisectriz del ángulo  $POP'$  es perpendicular a  $QQ''$  y que pasa por el punto medio de este segmento.

*Nota:* Sabiendo que la transformación es una similitud inversa, se puede determinar el punto fijo de la manera siguiente: sea P un punto,  $P'$  su imagen,  $P''$  la imagen de  $P'$  y  $P'''$  la imagen de  $P''$ . El punto fijo O se encuentra en la intersección de las rectas  $PP''$  y  $P'P'''$ .

- *Determinación de una similitud inversa conociendo dos puntos y sus imágenes:*

Sean P, Q dos puntos y  $P'$ ,  $Q'$  sus imágenes respectivas por una similitud inversa. La razón r de la homotecia se calcula con Cabri haciendo el cociente  $r = \frac{P'Q'}{PQ}$  de las longitudes de los segmentos. Para determinar el eje de simetría suponemos el problema resuelto y sea O el punto fijo y (d) el eje de simetría. Los segmentos  $PP'$  y  $QQ'$  cortan respectivamente el eje de simetría en los puntos E y F tales que  $\frac{EP'}{EP} = \frac{OP'}{OP} = r$  y  $\frac{FQ'}{FQ} = \frac{OQ'}{OQ} = r$  (propiedad de la bisectriz). El lugar geométrico de los puntos O tales que  $\frac{OP'}{OP} = r = 1$  (resp.  $\frac{OQ'}{OQ} = r$ ) es un círculo de diámetro  $EE'$  (resp.  $FF'$ ), cuyos los puntos E,  $E'$  (resp. F,  $F'$ ) dividen el segmento  $PP'$  (resp.  $QQ'$ ) en la razón r.

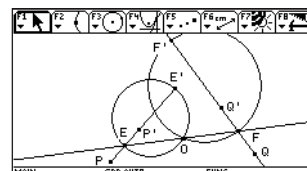
Se determina los puntos E y F, es decir el eje de simetría, haciendo los homotéticos de los puntos  $P'$  y  $Q'$  por las homotecias respectivas de centros P y Q y de razón  $\frac{1}{1+r}$ , y los puntos  $E'$  y  $F'$  haciendo los homotéticos de los puntos P y Q por las homotecias respectivas de centros P y Q y de razón  $\frac{1}{1-r}$ .

El punto O se encuentra a la intersección de esas dos circunferencias, y también de la recta EF.

Hacemos la macro *Trans4puntos*, cuyos elementos iniciales son los puntos P, Q,  $P'$ ,  $Q'$  y los elementos finales el punto fijo O, y el eje de simetría EF.

*Nota:* Una similitud inversa, es decir un producto de una homotecia y de una simetría axial, se puede siempre expresar por una homotecia cuyo centro está sobre el eje de simetría.

Sea  $H(O, k)$  una homotecia de centro O y de razón k, y una



simetría S de eje de simetría ( $\Delta$ ). Notamos d la distancia del punto O al eje de simetría. Consideramos ( $\Delta'$ ) la recta paralela a la recta ( $\Delta$ ) en el semi-plano definido por ( $\Delta$ ) que no contiene O a una distancia del punto O igual a  $\frac{2d}{1+k}$ , y  $O'$  el proyectado ortogonal del punto O sobre ( $\Delta'$ ). El producto de la homotecia  $H(O, k)$  y de la similitud S es igual al producto de la homotecia  $H(O', k)$  y de la simetría axial  $S'$  de eje de simetría ( $\Delta'$ ).

## Conclusión

Hemos podido con Cabri llegar a la determinación de la transformación dada que es un producto de una homotecia y de una simetría axial. Pero Cabri no es un software de demostración formal, es decir Cabri no demuestra solo permite visualizar, conjeturar, como todo software de geometría dinámica. Mismo si hemos podido construir, determinar, con las herramientas de Cabri la homotecia y el eje de simetría. Necesitamos ahora de dar una demostración de este problema para tener la certeza de la conclusión a la que hemos llegado, pero también para tener una visión global del problema.

*Nota:* La demostración analítica de este problema se encuentra disponible y puede ser requerida al correo electrónico: [mbarrale@dsc.cl](mailto:mbarrale@dsc.cl).

## Introducción

En el intento de encontrar una alternativa didáctica sólida de cómo enseñar matemáticas, la mayoría de los maestros, solo llegamos a enseñar de la manera en como nosotros mismos aprendimos y de tal forma que, el buscar innovaciones es casi nula, al respecto Maria del Carmen Chamorro escribe: “No se aprende a ser profesor imitando o copiando un modelo, no basta con observar a un buen profesor para aprender a ser profesor”.

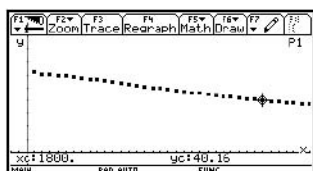
Mas sin embargo debo de aclarar que actualmente con el desarrollo que ha tenido la tecnología, ha permitido que se abra una puerta de grandes proporciones al uso de computadoras y calculadoras, y el uso de esta tecnología en el salón de clases ha llegado a convertirse en una poderosa herramienta para llevar a cabo el trabajo diario de enseñar matemática.

Bajo este nuevo modelo de enseñar a los maestros, ya empezamos a introducir en el salón de clases nuevas formas de ver la matemática, por supuesto que me estoy refiriendo a la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

Es así pues, que los maestros se ven motivados a diseñar, preparar y experimentar, con nuevas formas de trabajo, la calculadora y la computadora abren espacios para que esto se pueda llevar a cabo.

## Problema:

Se registra la temperatura de un vaso con agua y se obtienen los siguientes datos con la ayuda del dispositivo CBL™, los datos son tomados con intervalos de tiempo de 60 seg. cada uno.



Se muestra la temperatura y el tiempo a 60 seg. le corresponde 62.13° C y veamos estos datos en una tabla. Los datos de la tabla y los datos graficados son los datos que se obtuvieron en el experimento.

DATA	c1	c2	c3	c4	c5
1	60	62.13			
2	120	61.04			
3	180	60.59			
4	240	59.85			
5	300	59.3			
6	360	58.72			
7	420	57.7			

DATA	c1	c2	c3	c4	c5
10	600	55.44			
11	660	54.37			
12	720	53.67			
13	780	52.73			
14	840	51.8			
15	900	50.88			
16	960	50.05			

Veremos ahora la función que representa a estos datos, con la opción en la calculadora [F5] hacemos una regresión de los valores a una función exponencial.



Se observa que la función exponencial de regresión de los datos es  $y = (a) (b^x)$  donde

$a = 64.086878$  y  $b = .999741$ , la función resulta ser

$$y = (64.086878)(.999741^x) \quad 1.1$$

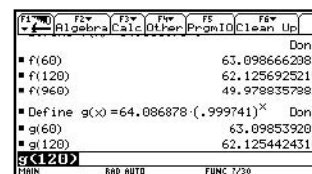
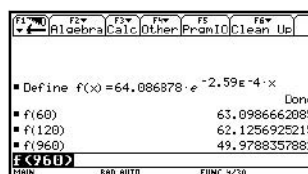
donde las  $y$ 's representa la temperatura y las  $x$ 's representa el tiempo.

$$\ln(y) = \ln[(64.086878)(.999741^x)]$$

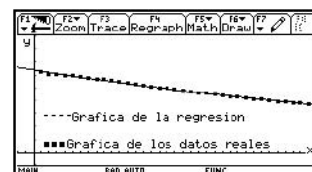
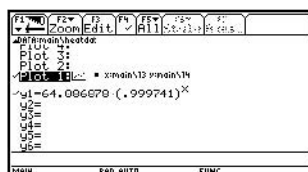
$$y = (64.086878) e^{(-.000259x)}$$

**Nota: se usa el modelo si  $y = (a) (b^x)$  entonces  $y = ae^{x \ln(b)}$**  1.2

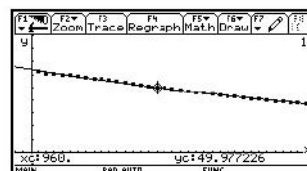
Podemos ahora consultar valores particulares de la función y ver estos escribiendo las 2 funciones 1.1 y 1.2



Observemos ahora las gráficas de las funciones antes mencionadas y compararemos con la gráfica de los datos reales.



En la pantalla de gráficas de las funciones de regresión y de los datos tomados en el experimento y también se pueden consultar valores particulares, observando que la gráfica de los datos reales es muy próxima a la gráfica de los datos de la función de regresión.



## Solución analítica del problema

Ahora resolveremos el problema tomando en cuenta la temperatura promedio del medio ambiente de donde fueron tomados los datos del experimento.

$T_m = 12.4358^\circ \text{C}$  con este dato encontraremos la ecuación de la forma:

### La ley del enfriamiento del Newton:

Esta ley dice que la rapidez con la que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura del medio ambiente, de tal forma que, si  $T(t)$  es la temperatura del cuerpo en cualquier instante  $t$  y  $T_m$  es la temperatura constante del medio ambiente se obtiene:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \text{ y cuya solución es}$$

$$T(t) = T_m + ce^{kt}$$

Si consideramos que:

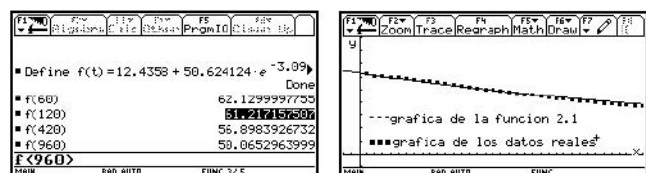
$$T_m = 12.4358^\circ \text{C}$$

$t = 60$	$T = 62.13$
$62.13 = 12.4358 + ce^{60k}$	
$t = 960$	$T = 50.05$
$50.05 = 12.4358 + ce^{960k}$	

La solución para este problema con los datos anteriores es:

$$T(t) = 12.4358 + 50.624124 e^{-0.00309t} \quad 2.1$$

Es importante señalar que la función solución 2.1 la graficaremos y la comparamos con la gráfica de los datos reales y encontraremos valores particulares para esta función solución.

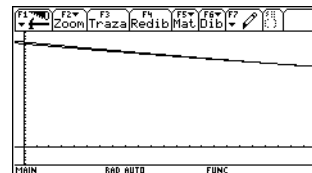


La siguiente gráfica muestra la comparación de las gráficas de la función

$$T(t) = 12.4358 + 50.624124 e^{-0.00309t}$$

y la función

$$y = (64.086878)e^{(-.000259x)}$$



y se observa que la gráfica de la regresión de los datos reales es muy similar a la gráfica de la solución analítica del problema

### Conclusiones

El uso de dispositivos como el CBL™ y la calculadora Voyage™ 200 nos proporciona magnificas ventajas, pues el alumno tendrá en cuenta en el proceso, que los datos reales recolectados en el experimento se pueden visualizar matemáticamente a través de una función y con el tema de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales y así le proporciona posibilidades de una mejor comprensión y vinculación con este tipo de problemas y no lo asociará como un problema más que viene en un libro y por lo tanto hay que resolverlo.

### Referencias:

**Chile J. Douglas.** Aplicaciones de cálculo y matemáticas previas al cálculo para la TI-92 Plus.

**Edwards C.H. y Penney David.** Ecuaciones diferenciales elementales. Editorial Printece Hall. Tercera edición.

**Chamorro Ma. Del Carmen.** Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas.

En el siguiente artículo plantearemos un problema de un hecho real y concreto y que sucede en el norte de Chile en la que encontramos integrado aspectos económicos, geográficos sociales y matemáticos.

**Situación problemática:**

En la región norte de Chile, región muy seca, se descubre una vertiente de agua subterránea que para su aprovechamiento se debe extraer este vital elemento con bombas. Se sabe que la primera bomba que se instale extraerá  $60\text{m}^3$  de agua diarios y por cada nueva bomba que se conecte con la misma capacidad, decrecerá en  $5\text{ m}^3$  su extracción.

Determine un modelo matemático que permita dar respuesta a las siguientes interrogantes:

- a) ¿Cuál es la máxima cantidad de agua que se puede extraer diariamente y con qué número de bombas?
- b) ¿Con qué cantidad de bombas comienza a disminuir la cantidad de agua extraída?
- c) ¿Cuánta agua se extraerá si se colocan trece bombas?

**Solución:**

1) Construya una tabla con tres columnas: Número de bombas,  $\text{m}^3$  extraídos, y  $\text{m}^3$  extraídos con el total de bombas.

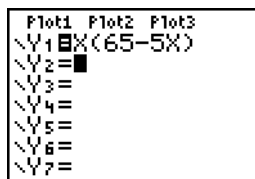
2) Haciendo un análisis recursivo de la situación obtenemos:

- $60 = 1(65 - 5 \cdot 1)$
- $110 = 2(65 - 5 \cdot 2)$
- $150 = 3(65 - 5 \cdot 3)$
- $180 = 4(65 - 5 \cdot 4)$
- $200 = 5(65 - 5 \cdot 5)$
- $210 = 6(65 - 5 \cdot 6)$
- $210 = 7(65 - 5 \cdot 7)$
- $200 = 8(65 - 5 \cdot 8)$
- $180 = 9(65 - 5 \cdot 9)$
- $150 = 10(65 - 5 \cdot 10)$
- $110 = 11(65 - 5 \cdot 11)$
- $60 = 12(65 - 5 \cdot 12)$
- $0 = 13(65 - 5 \cdot 13)$

Por recurrencia, podemos deducir la siguiente relación matemática  $f(x) = x(65 - 5 \cdot x)$ .

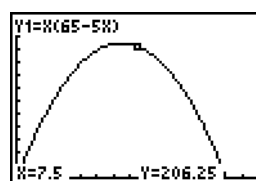
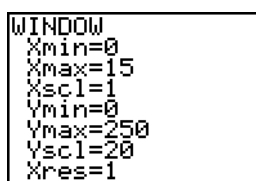
Usando calculadora gráfica, TI-84 podemos analizar la gráfica y la tabla de valores de la expresión anterior. La gráfica y la tabla de valores ayudará al estudiante a visualizar las respuestas a las interrogantes planteadas.

1. En [Y=] escribimos la expresión a analizar y para observar la tabla [2nd] [TABLE]. Los alumnos sacan sus propias conclusiones. X representa el número de bombas y Y1 los  $\text{m}^3$  extraídos

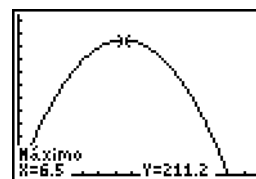
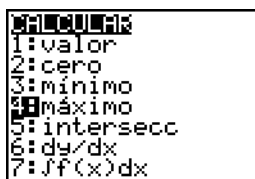


X	Y1
1	110
2	150
3	180
4	200
5	210
6	210
7	200
8	180
9	150
10	110
11	60
12	0
13	0

2. Para observar la gráfica los alumnos intentan el mejor ajuste para visualizar en su totalidad la gráfica de la situación. En [WINDOW] y luego [GRAPH]. Los alumnos comparan la tabla de valores con la gráfica para dar respuesta a las preguntas.



3. Para determinar el máximo de bombas a utilizar ingresamos al menú CALCULAR con [2nd] [CALC]. La discusión se provoca por el valor ¿podemos utilizar 6,5 bombas?



**Conclusión**

Con la ayuda de tecnología el salón de clases se transformó en una sesión interactiva, en la que se pudo observar una participación más activa de cada uno de los estudiantes. El proceso de enseñanza y aprendizaje logrado en esta actividad permitió no solo abordar los temas relacionados con la matemática, si no también los de otra disciplina.

Trabajando con esta metodología se logra no solo adquirir competencias en el campo de la matemática, sino también en el trabajo grupal de los estudiantes. La discusión de las soluciones y la elección del mejor método de investigación serán un significativo aporte al aprendizaje del respeto a las opiniones ajenas y el reconocimiento del error propio y el acierto ajeno como también el respeto al que se equivoca.

**Referencias**

[1] TEXAS INSTRUMENTS.(1999). Manual de la Calculadora Gráfica TI-83 Plus. U.S.A

[2] Barrales M. (2005). "Geometry, Functions and Technology" XVIII Education Conference Association of British Schools in Chile. Universidad de los Andes. Santiago, Chile.

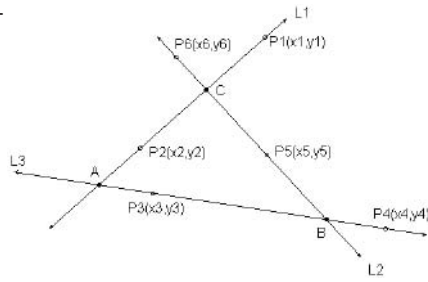
## Introducción:

Los lenguajes de programación son herramientas muy poderosas que nos permiten crear programas y software para resolver problemas en diferentes áreas. Una computadora (calculadora) funciona bajo el control de un programa el cual debe estar almacenado en la unidad de memoria; tales como el disco duro. Los lenguajes de programación de una computadora (calculadora) en particular se conocen como código de máquinas o lenguaje de máquinas. Los lenguajes de programación facilitan la tarea de programación, ya que disponen de formas adecuadas que permiten ser leídas y escritas por personas, a su vez resultan independientes del modelo de computador (calculadora) a utilizar. Los lenguajes de programación representan en forma simbólica y en manera de un texto los códigos que podrán ser leídos por una persona.

## Problema:

La idea del siguiente programa es netamente geométrico, y apto para los estudiantes, o profesionales del arte de la Geomensura.

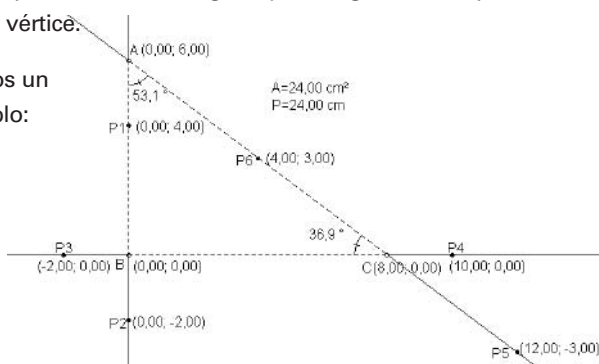
El problema es el siguiente: Se tienen seis puntos de tres rectas que se cortan, y forman un triángulo.



Los puntos no corresponden a los puntos de intersección, sino que el problema consiste precisamente en encontrar los puntos de intersección A, B y C.

El programa escrito en la Voyage™ 200, no solo encuentra los vértices A, B y C, sino que encuentra todos los elementos singulares del triángulo que se forman; coordenadas de: ortocentro, centro de gravedad, y circunscritorio. También el programa nos entrega los valores de: la longitud de los lados, el área, perímetro del triángulo, y los ángulos correspondientes a cada vértice.

Veamos un ejemplo:



```

Coordenadas
5
X =
12
Y =
-3
    
```

```

Vertice C
X =
8
Y =
0
    
```

```

Perimetro =
9.7444444444448888888888889444444444448888
10000000000750000000000
Area =
12000000001200000000003
500000000037500000000
Presione Enter
    
```

```

Circuncentro =
X =
4
Y =
3
PROGRAMA FINALIZADO
    
```

La sintaxis del programa va en las siguientes imágenes.



## Conclusión

La programación nos permite fomentar en los alumnos un pensamiento reflexivo y lógico en la creación de nuevas rutinas para obtener soluciones a sus problemas en el área que a ellos les interesa. En nuestro ejemplo queremos centrar la atención en la programación como vehículo para motivar el aprendizaje de la matemática.

Nota: El programa se puede solicitar al autor vía correo electrónico.

## Referencia

- Manual del usuario Voyage™ 200.

## Introducción

La necesidad de la enseñanza de la geometría en el ámbito escolar responde, en primer lugar, al papel que la geometría desempeña en la vida cotidiana.

Un conocimiento geométrico básico es indispensable para desenvolverse en la vida cotidiana: para orientarse reflexivamente en el espacio; para hacer estimaciones sobre formas y distancias; para hacer apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio. La geometría está presente en múltiples ámbitos del sistema productivo de nuestras actuales sociedades (producción industrial, diseño, arquitectura, topografía, etc.)

La forma geométrica es también un componente esencial del arte, de las artes plásticas, y representa un aspecto importante en el estudio de los elementos de la naturaleza.

El espacio del niño está lleno de elementos geométricos, con significado concreto para él: puertas, ventanas, mesas, pelotas, etc. En su entorno cotidiano, en su barrio, en su casa, en su colegio, en sus espacios de juego, aprende a organizar mentalmente el espacio que le rodea, a orientarse en el espacio.

La enseñanza de la Geometría ha tenido tradicionalmente un fuerte carácter deductivo. En educación secundaria, la Geometría se ha venido apoyando en el lenguaje del álgebra. En primaria (básica), aún sin ese carácter algebraico, formal, se ha fomentado excesivamente el aprendizaje memorístico de conceptos, teoremas y fórmulas; el simple apoyo de unos conceptos en otros previos; y la temprana eliminación de la intuición como instrumento de acceso al conocimiento geométrico, tratando de acelerar la adquisición de tales conceptos, teoremas y fórmulas, como si en ellas estuviera condensado el verdadero saber geométrico.

Por lo tanto, nuestra propuesta al utilizar una herramienta nueva (Cabri Junior en la TI-84 Plus), necesita de una reflexión sobre lo que hacemos, muchas veces cambia nuestro modo de trabajar (actitud) y hace surgir problemas sobre las verdades que teníamos. En el ámbito de los alumnos, nuestro ánimo es motivarlos a experimentar, a descubrir, a preguntarse, a obtener conjeturas, y a buscar soluciones.

En el presente artículo se realizará una descripción de los comandos básicos de la aplicación Cabri Junior en la TI-84 Plus, para luego revisar algunas actividades de aula que desarrolla, prepara, experimenta y estudia el “Grupo de Geometría USS y DSC” en relación a las construcción y comprobación de lugares geométricos.

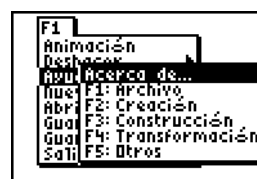
Los primeros pasos en Cabri Junior...

Por medio de la tecla [APPS] podemos acceder a las aplicaciones que tiene la calculadora y una de ellas es Cabri Jr y [ENTER] (Pulsar una tecla) [ENTER].



Para entrar a las herramientas geométricas debemos presionar las teclas del F1 al F5 que corresponden a las superiores en azul. [Y=], [WINDOW], [ZOOM], [TRACE], [GRAPH]

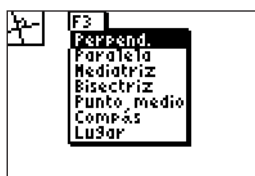
Archivo – F1 [Y=]



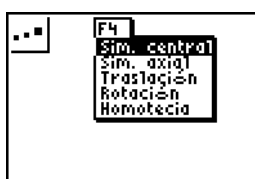
Creación/Figuras – F2 [WINDOW]



Construcción – F3 [ZOOM]



Transformación – F4 [TRACE]

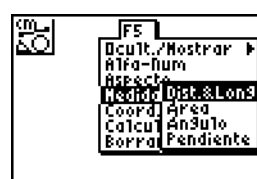
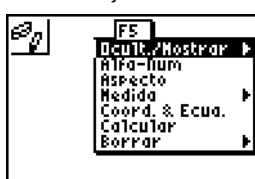


Varios / Misceláneos – F5 [GRAPH]

Ocultar Figuras

Cálculo de Longitud, Área, Ángulo, Pendiente

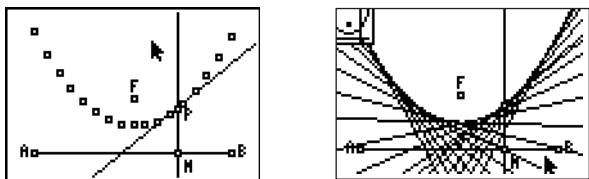
Borrar Objetos



Construcción y comprobación de Lugares Geométricos...

**Parábola:** Dibujamos un segmento  $\overline{AB}$  (directriz) y un punto F (foco). En el segmento  $\overline{AB}$  determinamos un punto M. (punto sobre). Intersectamos la perpendicular levantada en el punto M al segmento  $\overline{AB}$  con la mediatriz de F y M. obteniendo el punto P.

Lugar geométrico de P con respecto al punto M. Después lugar geométrico de la mediatriz con respecto al punto M para obtener la envolvente de la parábola. Se sugiere mover el foco para ver cómo se modifica la parábola, también medir la distancia entre F-P y P-M para realizar una comprobación numérica de su definición.

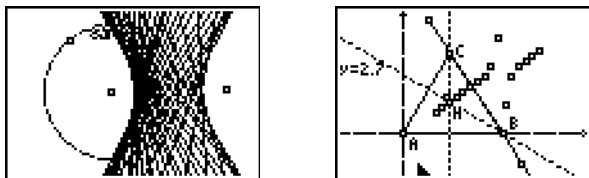


**Cardioide:** Dibujamos un circunferencia de radio r ( $C_1$ ). Sobre la circunferencia determinamos un punto A (punto sobre) y trazamos una nueva circunferencia de centro A y radio r' ( $C_2$ ). Lugar geométrico de  $C_2$  con respecto al punto A.



**Hipérbola:** Dibujamos un circunferencia de radio r ( $C_1$ ). Sobre la circunferencia determinamos un punto A. En el interior de la  $C_1$  determinamos un punto B y trazamos la mediatriz de A y B. Lugar geométrico de la mediatriz con respecto al punto A. ¿Cuáles son los focos? Comprobar su relación ( $F_1P-PF_2 = 2a$ )

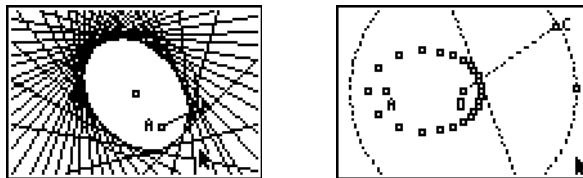
En el triángulo ABC se determina el ortocentro (intersección de las alturas). El vértice C se encuentra sobre una recta oblicua y que intersecta al lado AB. Lugar geométrico del punto H cuando el vértice C recorre la recta. Orientar la recta en otras posiciones... ¿qué sucede con el lugar geométrico?



Probar con una recta paralela a la base AB.

**Elipse:** Dibujamos un circunferencia de radio r ( $C_1$ ). Sobre la circunferencia determinamos un punto A. En el exterior de la  $C_1$  determinamos un punto B y trazamos la mediatriz de A y B. Lugar geométrico de la mediatriz con respecto al punto A.

Determinar dos puntos A y O. Trazar la Circunferencia (O,r) y determinar el punto C sobre ella. Construir la mediatriz de A y C. Intersectar la mediatriz con el radio OC determinando el punto P. Lugar geométrico de P cuando C recorre la circunferencia. ¿Cuáles son los focos? Comprobar su relación ( $F_1P+PF_2 = 2a$ )



**Caracol de Pascal:** Punto A cualquiera y una Circunferencia (O,r). M punto sobre la circunferencia y trazamos la Circunferencia (M,MA)

Lugar geométrico de la Circunferencia cuando M recorre la circunferencia.

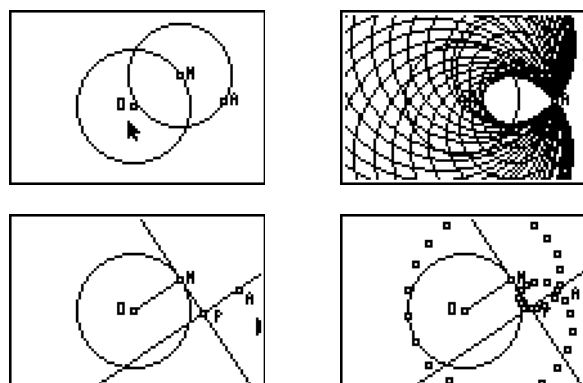
Cambiar la posición del punto A

¿Qué pasa cuando se encuentra sobre la circunferencia?

Cambiando la posición del punto A, observaremos los efectos que produce en el lugar geométrico, obteniendo como caso particular la cardioide cuando el punto A está en la circunferencia.

El caracol de Pascal también se puede obtener como la curva podaria de una circunferencia con respecto a un punto del plano.

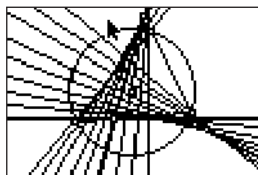
Partiendo de una situación análoga a la anterior, un punto M de una circunferencia y un punto exterior A, trazamos la perpendicular por el punto A a la recta tangente a la circunferencia en el punto M. El punto P, intersección de las dos rectas, es un punto de la curva que se completará al mover el punto M en la circunferencia.



**Deltoide de Steiner (hipocicloide tricúspide) y**

**Recta de Wallace – Simson:**

Construir un triángulo inscrito en una circunferencia. Determinar un punto P sobre la circunferencia y bajar las alturas desde P a los lados (prolongaciones) del triángulo. Los pies de las tres alturas se encuadran alineados y determinan la recta de Wallace y Simson. Lugar geométrico de la recta con respecto al punto P. ¿Dónde se encuentra el centro del deltoide?

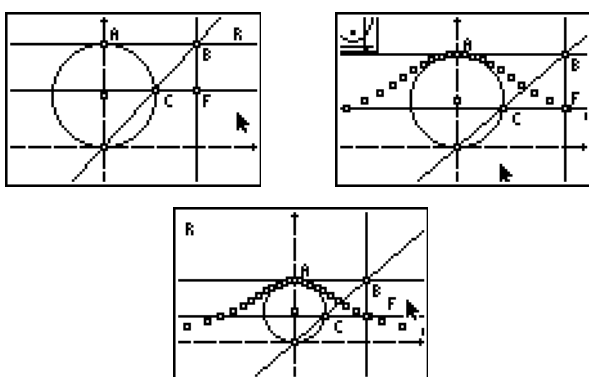


**La cúbica de Agnesi:** Dibujar una circunferencia tangente al eje de abscisas en el origen O.

Dibujar una recta r paralela al eje x, tangente a la circunferencia en el punto A del eje Y, diametralmente opuesta al origen O. Se determina un punto C en la circunferencia y se traza la recta OC. Corta a r en B.

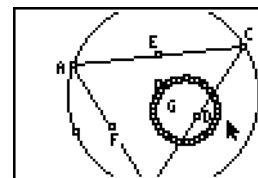
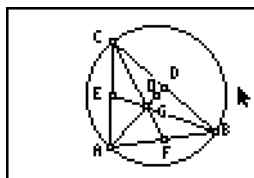
Llamar F al punto de intersección de las siguientes rectas: La paralela por C al eje X y la paralela por B al eje Y.

Observa que el punto F tiene la misma abscisa que el punto B y la misma ordenada que el punto C. Hacer que C recorra todos los puntos de la circunferencia, el punto F genera la “cúbica de Agnesi”. Características: Es una curva simétrica respecto al eje Y. El eje X es una asíntota de la curva. Ecuación:  $y \cdot x^2 = a^2 \cdot (a - y)$  Siendo  $a = OA =$  diámetro de la circunferencia. Los triángulos que se forman son semejantes.



**Medianas:** Suponga que se tiene una circunferencia con centro O y que en ella inscribimos un triángulo. Luego dibujamos las medianas AD, BE, CF. Obteniendo el punto común G, (centro de gravedad, baricentro o centroide). Nos preguntamos, ¿qué ocurre al centroide cuando movemos el punto A a través de la circunferencia? Un examen rápido muestra que el lugar geométrico deseado parece ser una circunferencia (aquí es necesario realizar una demostración o comprobación, tarea para

Uds.) y que la misma intersecta de forma “simétrica” el lado del triángulo opuesto al punto móvil (CB). Bueno como varios de Uds. piensan efectivamente la circunferencia del lugar geométrico es la imagen homotética de la circunferencia original;  $H(D, \frac{1}{3})$ .



**Conclusiones**

Gracias a la aplicación Cabri® Jr en la TI-83/84 Plus Silver Edition, una situación geométrica puede ser estudiada desde varios ángulos y de una forma dinámica, amigable para el estudiante y que le lleva a crear sus propias soluciones.

La experiencia de algunos años nos muestra jóvenes más motivados con el uso de tecnología en el aprendizaje de la matemática y con Cabri, tienen la ventaja de crear representaciones del problema a considerar y pueden dinamizar el aprendizaje de la geometría, logrando llegar a niveles más altos del conocimiento matemático, analizando y obteniendo conclusiones por su propia cuenta.

**Referencias Bibliográficas**

[1] Laborde, JM.(2002). Interactive geometry for everyone on the TI-83 Plus. 14th Annual T<sup>3</sup> International Conference. Calgary, Canadá.

[2] Laborde, C&JM.(2003). Geometrical Thinking for all with Cabri-Junior on the TI-83 Plus. 15th Annual T<sup>3</sup> International Conference. Nashville, Tennessee

[3] Olmstead, G., Vonder Embse, Ch. and Campe, K.(2004). Exploring Mathematics with the Cabri Jr. Application. Texas Instruments Incorporated. Dallas.

[4] Laborde, C. (2004). Geometrical Transformations on the TI – 83 + with Cabri junior. 16th Annual T<sup>3</sup> International Conference. New Orleans, Louisiana.

[5] Laborde, JM. (2004). Cabri® Jr.: Moving geometry for all on the TI-83 Plus. 16th Annual T<sup>3</sup> International Conference. New Orleans, Louisiana.

[6] Dahan, J. (2004). Lesson 0: To Begin with the dancing Filou.

[7] González, J. M. (2002). Hocus Pocus or Fous and Locus?. 14th Annual T<sup>3</sup> International Conference. Calgary, Canada.

[8] González, J. M. (2003). Connecting Álgebra and Geometry Using Locus and the Voyage 200. 15th Annual T<sup>3</sup> International Conference. Nashville, Tennessee.



### Introducción

“Este cuerpo está bien proporcionado” o “Esta fachada es hermosa” son frases que podemos escuchar a menudo en nuestro diario vivir, ¿pero que tiene que ver esto con la matemática?

Pues bien, estas frases “cliché” están muy relacionadas con la matemática, ya que el sólo hecho de hablar de “proporción” la hace parte de ella. La matemática no sólo se relaciona con esto, sino también con la naturaleza, en sus maravillosas formas y simetrías; con el arte y la arquitectura, intrínsecamente ligadas al concepto de belleza.

Con el paso del tiempo han existido grandes personajes que lograron establecer una relación entre la belleza y la matemática, esta recibe el nombre de proporción áurea, o razón divina o divina proporción.

La utilización de la tecnología, en particular la calculadora Voyage™ 200 nos puede ayudar a visualizar por una parte la construcción geométrica de un segmento dividido en proporción Áurea y por otra parte las representaciones que se le da al número áureo.

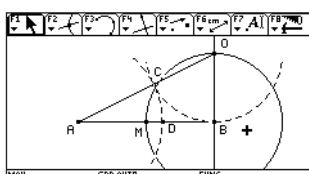
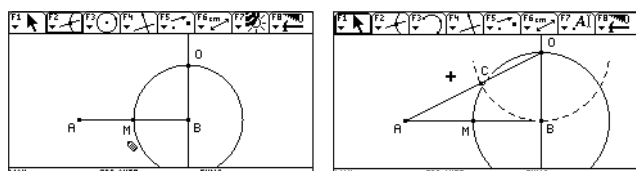
### El número áureo

Es un número irracional cuyo valor numérico es 1.618033989... aproximadamente. Lo podemos encontrar en diversos ámbitos tales como la naturaleza, el arte, la vida cotidiana, el cuerpo humano, etc.

Para poder llevar el concepto de sección áurea al aula podemos realizar la construcción de un segmento dividido en proporción áurea.

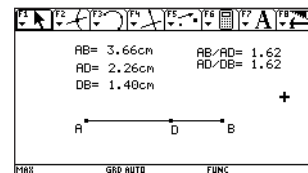
### Construcción

- 1.- Dado un segmento AB, determinar punto medio M.
- 2.- Trazar  $\perp$  a  $\overline{AB}$  por B
- 3.-  $\odot (B;BM) \cap \perp \det O$
- 4.-  $A \leftrightarrow O$
- 5.-  $\odot (O;OB) \cap A \leftrightarrow O \det C$
- 6.-  $\odot (A;AC) \cap \overline{AB} \det D$



Luego con la opción de menú [F7 – 1:Ocultar/Mostrar] ocultamos todo, menos el segmento AB dividido áureamente en D. Midiendo la longitud de los segmentos se llega a la siguiente proporción:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB} = \phi$$



Denominaremos:

AB = Segmento Total = 1 (se considerará el segmento total como segmento unitario)

AD = Segmento Mayor = x

DB = Segmento Menor = 1 - x

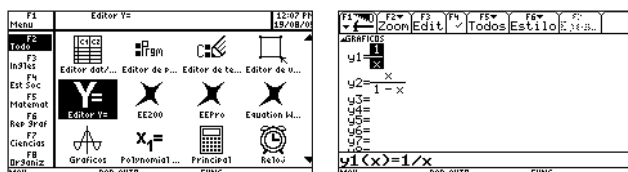
Como x es el segmento mayor estará definido de la siguiente manera

$$\frac{1}{2} < x < 1 \quad \therefore \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} = \phi$$

Visualicemos ahora algunas representaciones de  $\phi$  apoyándonos con la calculadora simbólica Voyage™ 200.

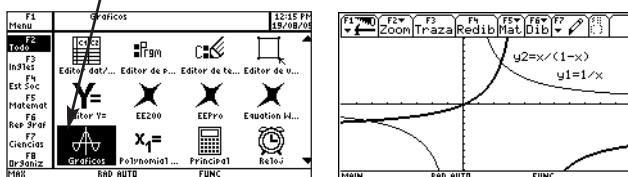
### Funciones

Primero se introducen ambas razones en [Editor Y=]

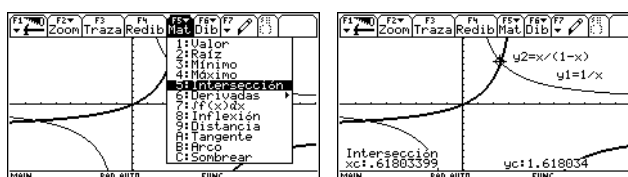


La Voyage™ 200 posee en su ventana principal una opción para graficar;

### Gráficos



Luego en esta ventana en su menú tiene una opción para determinar las intersecciones exactas de las curvas [F5-5: Intersección]



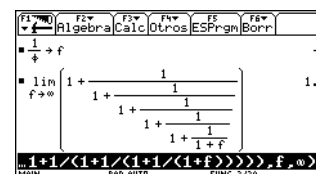
Como x se encuentra definido entre  $\frac{1}{2} < x < 1$  sólo se considera la intersección que esta en dicho intervalo.

La intersección dada es  $x = 0.61803399$   $y = 1.618034$ , posteriormente nos podemos percatar que el número áureo se encuentra presente en P (0.618 ; 1.618).

La misma situación la podemos observar en la tabla de valores que originan las funciones  $y_1$  e  $y_2$ .

x	y1	y2
.61801	1.6181	1.6179
.61802	1.6181	1.6179
.61803	1.618	1.618
.61804	1.618	1.6181
.61805	1.618	1.6181
.61806	1.618	1.6182
.61807	1.6179	1.6183
.61808	1.6179	1.6183
x = .61803		

$$\text{Si } \phi = 1 + \frac{1}{\phi} \Rightarrow \phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$



### Ecuación (expresión algebraica)

A partir de  $\phi = \frac{x}{1-x}$  haciendo las operaciones correspondientes se tiene

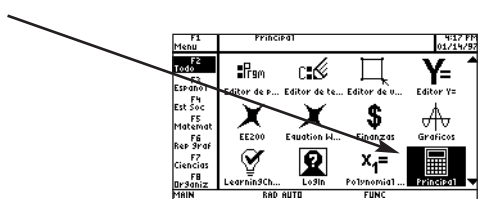
$$\phi = \frac{1}{\phi - 1}$$

$$\phi^2 - \phi = 1$$

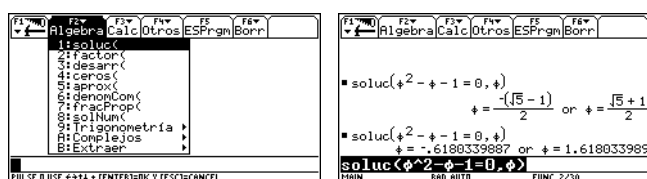
$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 (*)$$

Y con potencial de la calculadora podremos obtener las raíces exactas de esta ecuación cuadrática

### Menú Principal



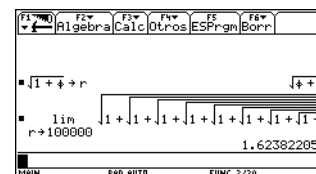
Ingresamos a *Principal*, en [F2-1: soluc( ] escribimos la ecuación (\*)



De las soluciones que se obtienen sólo nos sirve la positiva, pues estamos trabajando con longitudes, y con esta solución obtenemos el valor exacto de  $\Phi$ .

Podemos seguir experimentado escribiendo  $\Phi$  de la forma de fracciones continua y de raíces anidadas. Calculando los respectivos límites obtendremos unas aceptables aproximaciones.

$$\text{Si } \phi = \sqrt{1 + \phi} \Rightarrow \phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}}}$$



### Comentarios finales

Al llegar a un número exacto de  $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , con la ayuda de la Voyage™ 200 y al tener la posibilidad de estudiar este número desde diversos puntos de vista (*División de un segmento en forma áurea (Apps Cabri Geometry)*, *Representación en base a una expresión algebraica (Calc Home)*, *Representación mediante gráficos (Editor Y=)*, ) hemos podido confirmar que la utilización de una herramienta educativa es bastante enriquecedora, ya que permite indagar tanto a los alumnos como al profesor, en las distintas opciones que entrega la calculadora, para así hacer más entretenidos y dinámicos los contenidos que se revisan en el subsector matemática para que se logre mayor significancia en los estudiantes y de esta manera logren ser aprendidos con mayor eficacia.

La resolución de problemas utilizando una metodología activa (constructivista) y permitiendo el uso de tecnología resulta motivadora y entretenida, ya que los alumnos pueden experimentar varios métodos (geométrico, analítico, gráfico, numérico) para resolver un problema y avanzar a su ritmo, lo cual les permite entender el concepto en forma más profunda y tener una visión global de la situación a estudiar.

### Referencias

- 1.- Manual del usuario Voyage™ 200.
- 2.- Barrales M. "Apuntes de Geometría I". 2004. Universidad San Sebastián. Facultad de Educación. Concepción, Chile.
- 3.- [http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/tallerma/sec\\_aur1.htm](http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/tallerma/sec_aur1.htm)
- 4.- [http://descartes.cnice.mecd.es/taller\\_de\\_matematicas/razon\\_aurea/aureo1.htm](http://descartes.cnice.mecd.es/taller_de_matematicas/razon_aurea/aureo1.htm)
- 5.- [www.explora.cl/otros/metro/fibonacci.html](http://www.explora.cl/otros/metro/fibonacci.html)

# Conozca el editor



El Dr. Juan Melin Conejeros es de nacionalidad Chilena y obtuvo su doctorado y maestría en Matemáticas en la Universidad de Iowa, Estados Unidos. Además obtiene el grado de Magíster en Matemáticas en la Universidad de Santiago de Chile y el MBA mención Marketing en ESEM Madrid, España.

El Dr. Melín ha enseñado por más de 20 años en diversas universidades Chilenas y de Estados Unidos en las cuales ha tenido responsabilidad directa en la formación de profesores e ingenieros. Ha dirigido trabajos de tesis y guiado seminarios de titulación de profesores de matemáticas.

Ejerció la docencia en Estados Unidos en las universidades de Penn State University, Millersville University of Pennsylvania, West Chester University of Pennsylvania, Central Connecticut State University y The University of Iowa. En Chile, en Universidad Técnica del Estado, Universidad de Magallanes, Universidad Tecnológica Metropolitana, Universidad Andrés Bello, Universidad Diego Portales, Universidad de los Andes y Universidad Gabriela Mistral.

Fue director del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad de Magallanes, Punta Arenas, Chile. Condujo las labores de docencia, investigación y extensión universitaria de los académicos de las áreas de matemáticas y física.

En 1973 gana una beca otorgada por la Fundación Ford para cubrir el programa conducente a Magíster en Matemáticas en la Universidad de Santiago de Chile.

En 1990 participa en The University of Iowa, en el programa de National Science Foundation, Estados Unidos: Summer Workshops, Teachers as Leaders. El programa consistió en talleres conducentes a entrenar profesores líderes del Estado de Iowa en el uso de tecnología en la clase de matemáticas.

En 1993 obtiene una beca otorgada por la National Science Foundation, de Estados Unidos, la que le permite participar en el programa: "Incremento de uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas en Wesleyan University, Middletown, Connecticut, Estados Unidos.

Como expositor participa en: The Enhancement of concept development in calculus through the use of graphing calculators. Third Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics, Columbus, Ohio, USA. And Joint Mathematics Meeting, AMS-MAA, San Francisco, California, USA.

The Effect of using the computer algebra system Derive in the Mathematics laboratory on the achievement and attitudes of calculus students. Second conference on the Teaching of Calculus, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, USA.

Laboratorio para un curso de Cálculo. Conference for Calculus for a new Century. Duke University, North Carolina, USA.

Calculus in Context. Northern Illinois University, Chicago, USA.

La tecnología en el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas y las Ciencias. XI Jornadas de Educación Matemática, Valdivia, Chile.

Actualmente el Dr. Melin es director de la revista Innovaciones Educativas y trabaja como consultor de Texas Instruments en labores de marketing educacional para Latinoamérica.

## DIRECCIONES en INTERNET

<http://www.divulgamat.net/index.asp>

<http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/>

<http://www.dsc.cl/taller2004/talleres.htm>

[http://www.dsc.cl/cabri\\_2004/cabri.htm](http://www.dsc.cl/cabri_2004/cabri.htm)

<http://www.dsc.cl/matematica2002/index800x600.htm>

<http://personal.telefonica.terra.es/web/emiliomartin2002/index.htm>

<http://www.calc.org/>

<http://tigcc.ticalc.org/>

<http://www.calculadoras.cl/foro>

<http://www.vcalc.net/index.html>

<http://www.ticalc.org>

## EVENTOS

### XXXVIII CONGRESO NACIONAL DE LA SMM

23 al 28 de octubre de 2005 - Instituto Politécnico Nacional-Unidad Profesional Adolfo López Mateos. D.F. Mexico

### I CONGRESO NACIONAL 2005

#### TECNOLOGÍAS PORTABLES: enseñanza y aprendizaje.

28 y 29 de octubre de 2005 - Campus Rodelillo UVM - Viña del Mar, Chile  
E-mail: mdiaz@uvm.cl

### IV CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y FÍSICA

15 al 19 de noviembre de 2005 - Trujillo, Venezuela  
asovemat\_trujillo@yahoo.es - <http://es.geocities.com/ivcitemf/Primer Anuncio>

### CONGRESO NACIONAL DE LA ASOCIACIÓN NACIONAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

17 al 19 de noviembre de 2005 - Acapulco, Guerrero, Mexico.

### CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE MATEMÁTICA ASISTIDA POR COMPUTADORA

1 al 3 de diciembre, 2005 - Costa Rica  
[www.itcr.ac.cr/ciematic](http://www.itcr.ac.cr/ciematic)

### XV SIMPOSIO INTERNACIONAL DE MÉTODOS MATEMÁTICOS APLICADOS A LAS CIENCIAS

21 al 24 de febrero de 2006 - San José, Costa Rica  
<http://www.emate.ucr.ac.cr/simmac/>

### T3 INTERNATIONAL CONFERENCE

February 24-26, 2006 - Denver, EE.UU.  
<http://education.ti.com/us/training/conferences/international/2006/overview.html>

### V FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

30, 31 de marzo y 01 de abril de 2006 - Puntarenas y Limón, Costa Rica  
<http://www.cientec.or.cr/matematica/festival.html>

### 20 REUNIÓN LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

10 al 14 de julio de 2006 - Ciudad de Camagüey, Cuba - Universidad de Camagüey  
relme20@inf.reduc.edu.cu

### I REUNIÓN PAMPEANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Agosto 2006 - Universidad Nacional de La Pampa Argentina  
Repem06@yahoo.com.ar