Texas Instruments

innovaciones educativas

5ta. Edición - 2004

En ésta edición

Explorando un problema de optimización con la Voyage™ 200

Juanita Contreras S[1]. Claudio del Pino O[2].

Introducción

La resolución de problemas juega un rol fundamental en la enseñanza y aprendizaje de la matemática ([1], [2]). Desde épocas muy antiguas, se han generado herramientas de apoyo al trabajo matemático y por consiguiente a la resolución de problemas. En los últimos años, las calculadoras gráficas se han constituido en un recurso pedagógico, que bien utilizado, permiten optimizar el abordaje de problemas matemáticos de distinta naturaleza, y a la vez, la posibilidad de explorar simultáneamente un mismo problema desde diferentes planos: geométrico, numérico, gráfico y algebraico [3].

Las posibilidades de cálculo numérico y simbólico, de graficación y de programación de calculadoras como la TI-89, la TI-92 y la Voyage™ 200, con sus múltiples ambientes integrados de trabajo, plantean a los profesores de matemática, de todos los niveles, interesantes desafíos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En este trabajo se aborda, a modo de ejemplo, un problema estándar de optimización aprovechando las posibilidades que ofrece la Voyage™ 200.

Problema

Sea S la región del plano delimitada por las gráficas de la parábola $y = 9 - x^2$, la recta $y = \frac{9x}{4} + 9$ y el eje de las X (Ver figura 1). Determinar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la región S (Ver figura 2).

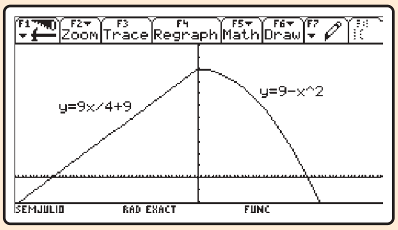


Figura 1

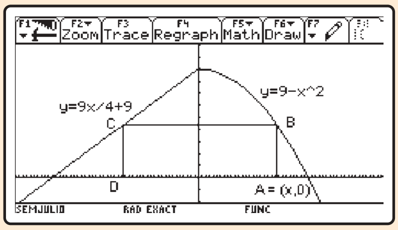


Figura 2

[1] Universidad de Talca, jcontres@utalca.cl
[2] Universidad de Talca, cdelpino@utalca.cl

Continúa en la página 3

Editorial

Estimados Profesores de Latinoamérica

Ponemos a su disposición un grupo de artículos escritos por profesores y que muestran diferentes formas de uso de la tecnología portable de Texas Instruments para abordar temas relacionados con el quehacer de las matemáticas y las ciencias. En la presente revista Ud. encontrará artículos relacionados con el arte, la estética y la naturaleza que se entrelazan con el uso de la geometría. Además trabajos relacionados con la programación, simulación y optimización.

La calculadora gráfica como herramienta tecnológica nos ofrece la posibilidad de despertar el interés del alumno y acercarnos más rápidamente a obtener la comprensión de los conceptos y a desarrollar la capacidad de resolver problemas. Más aún, hoy la tecnología inalámbrica (TI-Navigator) hace posible el complemento en forma dinámica e interactiva el trabajo entre calculadoras y computadoras, permitiendo asi que otras áreas de la enseñanza tales como: Química, Geografía, Inglés, Ciencias Sociales, se incorporen a este proceso.

Aprovechamos esta oportunidad para dar la bienvenida al al Dr. Edison de Faria quien se unirá al grupo de editores de esta revista. Al mismo tiempo agradecemos al Dr. Héctor Alvarez la labor que desarrolló como editor de esta revista y le deseamos el mayor de los éxitos en sus labores de docencia e investigación.

Desde esta tribuna invitamos a nuestros lectores a enviarnos actividades que contribuyan a que nuestros estudiantes logren comprender las matemáticas y las ciencias de manera entretenida y eficiente.

NOTA: Si tiene una actividad / artículo que quiera compartir y publicar en ésta revista, contacte a uno de los editores.

¡Una calculadora GRATIS!

Ayude a otros profesores a perder el miedo a la tecnología. Envíe un artículo a nuestros editores. Si el mismo es aprobado y publicado en esta revista, recibirá una calculadora de su elección ¡gratis!

Perfil de los artículos

- Artículos que despierten la curiosidad por la tecnología y motiven al profesor a comenzar a utilizarla en sus clases
- Artículos que contienen una novedad de cómo resolver un problema que logra que otros educadores perciban las ventajas de resolver problemas con la calculadora
- Artículos con actividades que:
  - Usted exitosamente ha incorporado el uso de calculadoras en sus lecciones diarias y que sean cortas y fáciles de leer con pantallitas o gráficas
  - Incluyen pasos a seguir claramente detallados y explica fácilmente los conceptos a demostrar a sus estudiantes
  - Contienen formas en las que usted ha logrado exitosamente ligar las matemáticas a otras asignaturas utilizando tecnología.

Instrucciones Importantes:
Favor de enviar su artículo / actividad a uno de los editores en un archivo de Word, fuente Arial de 12 puntos, máximo de 3 páginas y enviar las pantallitas (formato tif, 300 dpi mínimo) y gráficos en archivos separados.

Solamente artículos / actividades prácticas que abordan el uso de calculadoras Texas Instruments para uso inmediato en las clases cotidianas. Tesis o reportes de investigación con tecnología de Texas Instruments son bienvenidos para publicarse en Internet pero no para la revista.

Aproximación geométrica

En el software Cabri, que la calculadora Voyage™ 200 trae incorporado, se puede realizar una simulación del problema. Para ello se construye:

- Para x>0, la parábola $y=9-x^2$
- Para x<0, la recta y=9x/4+9
- Se inscribe en la región S un rectángulo ABCD, descrito en el enunciado, tal que OA es igual x, con x>0.
- Se calcula el área de dicho rectángulo en función de x (indicado por R en las figuras 3 y 4).

A continuación desplazando el punto A, se van actualizando el valor de x, el rectángulo y el valor de su área. De esta manera se logra ubicar, aproximadamente, el valor de x que permite resolver el problema. En la figura 3 se entrega la situación para x=1 y en la figura 4 para el caso x=1.93. En el último caso, las dimensiones del rectángulo son 3.64 y 5.27, respectivamente.

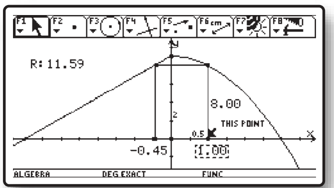


Figura 3

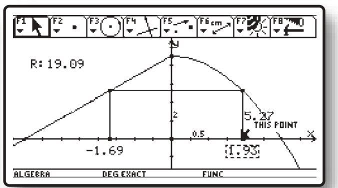


Figura 4

Observación: Esta calculadora permite generar una tabla de datos y su representación gráfica, a partir del ambiente Cabri. En la figura 5 se muestra, junto al modelo geométrico, la tabla generada: valor de x (columna c1) versus área del rectángulo (columna c2). En la figura 6, se muestra un gráfico de los puntos de esta tabla de datos.

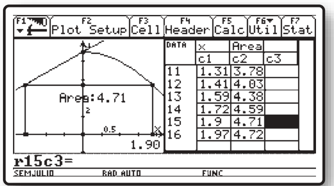


Figura 5

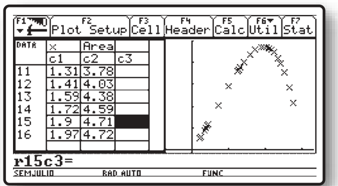


Figura 6

Este ambiente de trabajo permite ilustrar el problema y encontrar un valor aproximado de x.

Es claro que para resolver el problema, basta con determinar el valor de x=OA que maximiza el área del rectángulo. Por esta razón, en lo que sigue, solo se determinará este valor.

Para trabajar el problema en los otros ambientes de la calculadora, se requiere determinar la función *y=f(x)* que representa el área del rectángulo en función de x (abscisa del punto A). Trabajando en la figura 2, se obtiene que los lados del rectángulo (en función de x) son: $x+\frac{4}{9}x^2$ y $9-x^2$.

Luego: $y=f(x)=\left(x+\frac{4}{9}x^2\right)\left(9-x^2\right)=-\frac{4}{9}x^4-x^3+4x^2+9x$.

Claramente, el dominio de esta función, en relación al problema, es el intervalo $[0,3]$.

Aproximación numérica

En el ambiente de edición de funciones, se ingresa la fórmula de la función f(x). Luego, en el ambiente de tablas se ingresan, en propiedades de tabla, los parámetros indicados en la figura 7. Por inspección de la tabla generada (figura 8) se observa que el máximo buscado, se encuentra cuando x está entre 1.5 y 2.5.

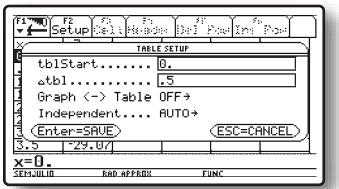


Figura 7

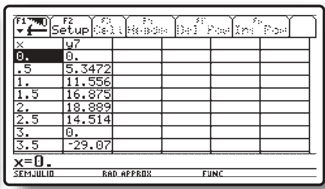


Figura 8

Para refinar esta tabla, se ingresa en el setup: tblStart=1.5 y Δtbl=0.1. De la nueva tabla se obtiene que el valor de x buscado, se encuentra entre 1.9 y 2. Refinando con tblStart=1.9 y Δtbl=0.01, se obtiene una mejor aproximación de la solución: el valor de x se encuentra entre 1.94 y 1.95. Así, se ha encontrado el valor de x con un decimal exacto: 1.9. En caso de necesitar el valor de x con más decimales exactos, se debe continuar refinando las tablas obtenidas.

Aproximación gráfica

Definiendo la ventana gráfica indicada en la figura 9, se obtiene el gráfico de la función y=f(x) (figura 10).

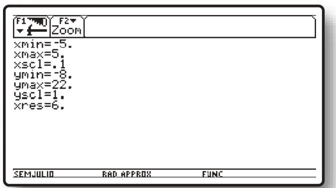


Figura 9

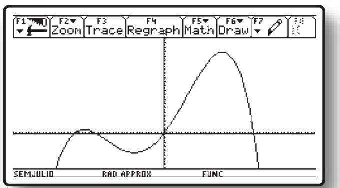


Figura 10

Ahora, en el ambiente gráfico, usando el cursor gráfico o la opción Trace (F3), se determina, aproximadamente, el valor de x. Adicionalmente, en este ambiente, usando la opción Maximun (**F5 – 4**), entrega el valor aproximado x=1.9504378.

Aproximación algebraica (usando herramientas del Cálculo)

Trabajando en el ambiente HOME, se implementa el método de la segunda derivada para encontrar extremos de una función. Para ello se ingresan los siguientes comandos (figura 11):

- -4x^4/9-x^3+4x^2+9x STO f(x)
- ***d*** (f(x),x)
- **nsolve** (***d*** (f(x),x)=0,x) | x>0

  De este modo, se obtiene el valor crítico x=1.9504377578. Para analizar este valor crítico, se ingresa el comando:

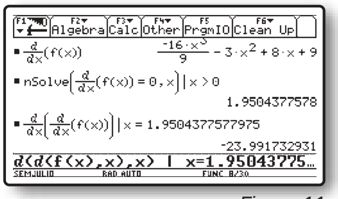


Figura 11

- ***d*** (***d*** (f(x),x),x) | x=1.9504377578

Explorando un problema de optimización con la Voyage™ 200

Continuación

Como el resultado obtenido es negativo, se tiene que en x=1.9504377578 la función f(x) tiene un máximo.

Desde el punto de vista pedagógico, los diferentes ambientes interactivos que ofrecen las calculadoras modernas para abordar un problema, es razonable esperar, entre otros, que el estudiante:

- Enriquezca sus estrategias para enfrentar y resolver problemas.
- Visualice los diferentes ámbitos de la matemática como un todo integrado.
- Reconozca la potencia, en el trabajo matemático, que proporciona una calculadora como la Voyage™ 200.

Bibliografía

1) **de Guzmán, M.**, *Tendencias Innovadoras en educación matemática*, Ediciones OEA,1993.
2) **Gates, J.** (Director ejecutivo), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, NCTM, 1989.
3) **Queralt, T.**, *Un enfoque constructivista en el aprendizaje de las matemáticas con las calculadoras gráficas*. RELME 14, Panamá, 2000.
4) **Schoenfeld, A.**, *Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics*, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan Publishing Company, 1992.
5) **Waits, B. and Demana, F.**, *El álgebra simbólica en la Educación Matemática del siglo XXI: ¡Un llamado para la acción!*, Conferencia de Tecnología de los Standards 2000, NCTM, Washington DC, 1998.

¿Cómo puedo conectar la calculadora al computador?

Primero

Debes bajar el software TI Connect del sitio (1), que permite conectar tu calculadora con tecnología Flash (TI-73, TI-83 Plus, TI-83 Plus Silver Edition, TI-89, TI-92, TI-92 Plus, Voyage™ 200) con el computador y así podrás actualizar el sistema operativo sin cambiar de calculadora, bajar nuevas aplicaciones (APPS) de acuerdo a tus necesidades (estadística, idiomas, ciencias sociales, ingeniería, geometría, etc.), hacer pantallas para apuntes, crear tarjetas de estudio (StudyCards™), bajar juegos, acceder a TI Online Store o simplemente hacer un respaldo de tus archivos guardados en la memoria de la calculadora.

(1) http://education.ti.com/us/product/accessory/connectivity/down/download.html#win

TI-Connect tiene versión en español, para Windows® o Macintosh®.
Dependiendo de tu servicio de conexión a la red, cargar el TI-Connect se puede demorar un tiempo (son 9.41 MB).

Segundo

Conecta a la calculadora el cable de enlace TI GRAPH LINK™ (transparente) con entrada de USB o el serial (negro) al PC

Haz clic en el icono de TI Connect™ 

Ahora estas listo para comenzar a trabajar.

Te recomendamos actualizar el sistema operativo de tu calculadora y bajar nuevas aplicaciones. Suerte.

Para ver Aplicaciones (Apps): http://education.ti.com/us/product/apps/features.html

Una estrategia didáctica para abordar problemas de optimización, el caso del problema da la caja sin tapa

Maximiliano de las Fuentes Lara
Maximilian.fuentes@sia.mxl.uabc.mx
Carlos E. Valdez G.
Carlosv28@hotmail.com

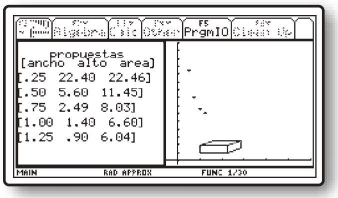
Apoyados en la teoría de la escuela francesa sobre las representaciones (Duval y otros) se diseñó una estrategia didáctica de acercamiento a conceptos matemáticos del cálculo diferencial, como lo son: función, dominio, rango, límite, derivada, entre otros. So pretexto la resolución de problemas de optimización. Dicho acercamiento se logra mediante el apoyo de la calculadora graficadora, simbólica y programable, en particular el uso de la programación, la cual permite de manera simultanea visualizar y asociar diferentes representaciones, a saber: gráfica, icónica, numérica y algebraica. Esta estrategia didáctica de acercamiento también se justifica en virtud de las dificultades que tienen los estudiantes para plantear y resolver por si solos situaciones problemáticas que involucren el modelado, los algoritmos y la interpretación de resultados, además de la deficiencia para vincular los objetos matemáticos con su funcionalidad en diferentes contextos y la aplicación correspondiente de los conceptos matemáticos a los problemas de ciencia e ingeniería.

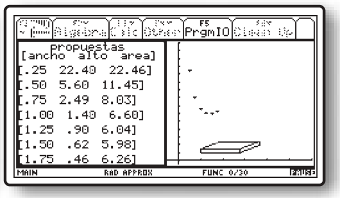
En particular la calculadora graficadora simbólica y programable es objeto de un verdadero examen de reflexión, la capacidad expresiva es potente en relación con la estrategia didáctica que se diseñe para la apropiación y/o desarrollo de competencias, debe aclararse que su uso en la educación no tiene por objeto reducir operaciones o simplificar procedimientos algebraicos o numéricos, mas bien se trata de un mediador cuyo fin es entre otros la de auxiliar al estudiante en la observación de los efectos de la variación de parámetros, el estudio y análisis de fenómenos de tipo geométrico o numérico, en general la exploración y el descubrimiento de ciertas regularidades mediante la construcción de situaciones hipotéticas a partir de estrategias didácticas previamente diseñadas.

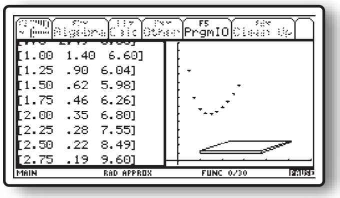
A continuación, con apoyo de la calculadora graficadora simbólica y programable, se intenta mostrar una idea que creemos permite conectar diferentes representaciones, hemos aprovechado para tal caso un problema típico de optimización, el conocido problema de la caja sin tapa. Lo describimos a continuación: Se requiere construir una caja de base cuadrada sin tapa y volumen definido, el problema consiste en determinar las dimensiones de la caja de manera que la cantidad de material utilizado sea mínima.

El programa desarrollado para este caso, durante el proceso de su ejecución en la calculadora permite abordar distintas propuestas virtuales, esto se traduce en la promoción de sentido de las distintas representaciones bajo cierto contexto físico, los inicios de la fabricación de un gráfico continuo a través de un gráfico discreto, la descripción, el tratamiento y la conversión de cada representación, así como también el principio del análisis numérico, gráfico y algebraico de la función. Esta actividad toma mas fuerza cuando consideramos que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, consecuentemente se hace necesario tener representaciones de los mismos.

En este mismo sentido es posible asociar, conectar y transitar en las distintas representaciones, digamos de la icónica a la numérica y de la numérica a la gráfica, _ver figuras_ en general realizar conversiones de un registro a otro. En todos los casos tales registros contemplan un sentido práctico, es decir están ligados a un contexto físico.







De hecho, como lo menciona Robert T. Smith y Roland B. Minton en la introducción de su libro de Cálculo, Tomo I, Editorial Mc Graw Hill, julio 2000. "Estamos de acuerdo con muchas de las ideas surgidas del movimiento de reforma al cálculo; en particular, creemos en la regla de tres, según la cual los conceptos deben presentarse gráfica, numérica y algebraicamente, cuando sea apropiado, además de los contextos verbal y físico".

Es necesario tener en cuenta que la calculadora simbólica no solamente plantea determinadas restricciones al proceso docente, sino que a la vez abre nuevas posibilidades para conducir la actividad de aprendizaje, a cuenta de sus capacidades funcionales. Sin embargo, las posibilidades funcionales de las calculadoras simbólicas deben ser analizadas desde el punto de vista de la psicología del aprendizaje y utilizarse siempre desde el punto de vista de la conducción de la actividad de aprendizaje.

En este sentido, hacemos énfasis en la promoción de visualizar, analizar y vincular o conectar las diferentes representaciones (icónica, gráfica, numérica, algebraica), éstas acciones y/o habilidades pueden impulsarse mediante el diseño de estrategias didácticas fundamentadas teóricamente, en las que se incorpore tecnología de avanzada como lo es la calculadora graficadora simbólica y programable.
Para bajar el programa de la caja sin tapa, visite: http://ingenieria.mxl.uabc.mx/~carmax

Referencia

Duval Raymund-Registros de Representación Semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.
Díaz Gómez José Luis-Introducción al uso de los recursos computacionales. Marzo 1995
De Las Fuentes Lara Maximiliano-Una propuesta para la construcción del concepto de raíz real empleando la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos. El caso de las funciones lineales y cuadráticas. Tesis de Grado. Noviembre 1998.
TI-92-Manual del Usuario. Texas Instruments. 1995

Dos alternativas de solución para un problema de lugar geométrico

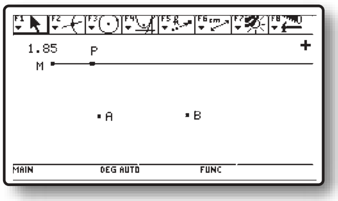
Prof. Sebastián E. Lagos Zamorano
elagos@umce.cl

En Matemática es frecuente que un problema admita más de una alternativa de solución. El presente artículo se refiere a dos modalidades de solución de un clásico problema de lugar geométrico, utilizando la aplicación Cabri Geometry en la calculadora Voyage™ 200. Se incluyen, además, algunos alcances de índole pedagógica que derivan de las soluciones propuestas.

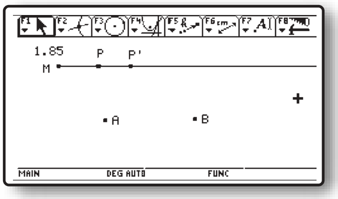
El problema a considerar es el de determinar el **lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cuociente de sus distancias a dos puntos fijos es constante.**
De acuerdo con este enunciado, los elementos dados son dos puntos fijos — que en todo lo que sigue se denotarán por A y B — y una constante que se denotará por k.

Primera alternativa

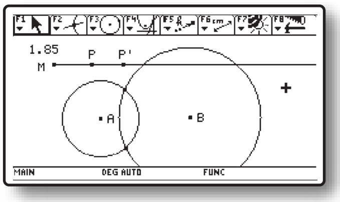
La constante k se expresa mediante un número real, escrito en forma decimal, utilizando la opción EDICIÓN MUMÉRICA de Cabri. En este caso conviene organizar los datos del problema considerando:
a) Un rayo con origen M.
b) Dos puntos fijos A y B
c) Una constante numérica, en este caso elegida igual a 1.85
La pantalla de inicio es, entonces, la siguiente:



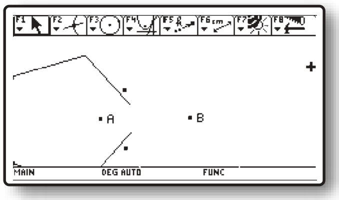
Sea X un punto del lugar geométrico pedido. Entonces debe verificarse que $XA = K \cdot XB$. Considerando un punto P en el rayo anterior, de modo que $MP = XA = x$, el problema quedará resuelto al construir un segmento de longitud y de modo tal que $y = kx$. El segmento de medida y se puede obtener como imagen del punto P mediante una homotecia de centro M y de razón $k = 1.85$. Denotando por $P´$ la imagen de P mediante tal homotecia, resulta que $MP´= K \cdot MP = k \cdot x$, es decir $y = MP´$.



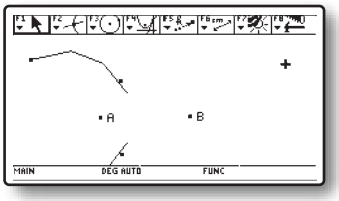
Para satisfacer las condiciones del problema, se requiere determinar los puntos de intersección de las circunferencias con centros en A y en B y con radios MP y $MP´$ respectivamente.



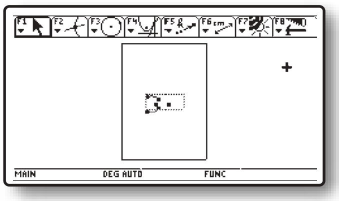
En este caso, el lugar geométrico obtenido, al variar el punto P sobre el rayo, es la figura siguiente:



Aumentando el número de puntos del lugar geométrico a 99 (máximo permitido por el dispositivo), con el objeto de tener la posibilidad de visualizar una curva más familiar, se obtiene el siguiente resultado:



Una visión más completa del lugar geométrico, aunque reducida, se puede obtener recurriendo a la opción MOSTRAR PÁGINA, a la cual se accede desde la tecla F8.



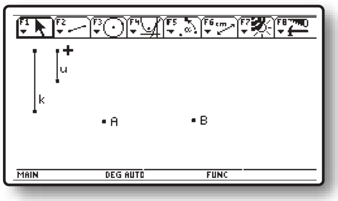
Observando atentamente el resultado obtenido, da la impresión que el lugar geométrico es una circunferencia, a pesar de que la Voyage™ 200 no brinda evidencia alguna sobre la naturaleza de este lugar geométrico.

Dos alternativas de solución para un problema de lugar geométrico

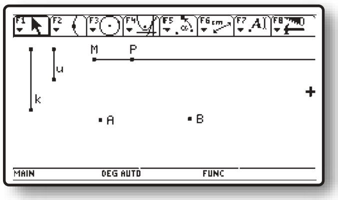
Continuación

Segunda alternativa

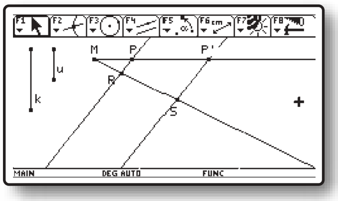
La constante k se asocia a la longitud de un trazo.
Los datos del problema se representan dibujando:
a) Un trazo de medida k.
b) Un trazo de medida unitaria u.
c) Dos puntos fijos A y B.
La pantalla de inicio es, en este caso, la siguiente:



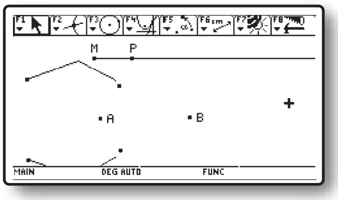
Como se trata de determinar el lugar geométrico de los puntos X tales que $XA = K \cdot XB$, basta considerar un punto P en un rayo de origen M , de modo que $MP = XA = x$.



El problema quedará resuelto al construir un segmento de longitud y de modo tal que $y = k \cdot x$, es decir $y \cdot u = k \cdot x$. De acuerdo al Teorema de Thales es posible, entonces, construir el trazo de medida y. En la siguiente figura:
$MP = x, MR = k, RS = u, SP' // RP$, de modo que $PP' = y$.



El lugar geométrico pedido está constituido por los puntos de intersección de las circunferencias con centros en A y en B y con radios x e y respectivamente, cuando el punto P varía sobre el rayo.



Tal como en el caso anterior, el lugar geométrico parecer ser una circunferencia. Una constatación de esta conjetura puede lograrse haciendo variar k.

Comentarios

1) Si bien es cierto que el lugar geométrico obtenido es prácticamente el mismo para las dos alternativas analizadas, ellas corresponden a modos diferentes de resolución, que el profesor deberá decidir sobre cuál de ellas resulta más adecuado utilizar.
Un aspecto particularmente interesante, por la riqueza pedagógica de las situaciones que se generan, reside en observar la variación del lugar geométrico conforme varía la constante k. En particular, los valores $k = 1$ y $k = -1$ permiten realizar un estudio global del lugar geométrico propuesto, aclarando de paso que sólo para valores de la constante distintos de -1 y de 1, el lugar geométrico que se obtiene es una circunferencia.

2) La manipulación de la variación de la constante k resulta ser considerablemente más fácil en la segunda alternativa, pero es importante que tanto los alumnos como el profesor obtengan sus propias conclusiones al respecto.

3) Una actividad no considerada en este trabajo, pero posible de proponer a los alumnos, consiste en determinar el centro y el radio de la circunferencia obtenida como lugar geométrico, para los casos $k \neq 1$ y $K \neq -1$.

4) Otro aspecto interesante de considerar es el relativo a la "exactitud" del lugar geométrico, en particular para valores "grandes" de la constante k. Este aspecto resulta ser particularmente importante, dadas las limitaciones de precisión en los dibujos obtenidos.

5) Cualquiera sea la alternativa elegida, el solo análisis de los dibujos generados no es suficiente para asegurar que para todo valor de $k \neq 1$el lugar geométrico es una circunferencia. La necesidad de una **demostración** se hace evidente al querer justificar geométricamente el lugar geométrico correspondiente a este caso.

Bibliografía

Réunion des Professeurs, *Cours de Géométrie*
Maillard et Millet, *Géométrie*
Lucienne Félix - Alfred Doneddu, *Géométrie*
Moise – Downs, *Modern Geometry from an advanced satandpoit*
Omer Cano, *Geometría*

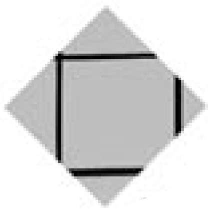
La geometría de la estética

Arq. Mabel P. Trozzoli
mabeltrozzoli@hotmail.com
Lic. Paula Corti
paulacorti@fibertel.com.ar

" Pero es imposible combinar dos cosas sin una tercera; es preciso que exista entre ellas un vínculo que las una. No hay mejor vínculo que el que hace de sí mismo y de las cosas que une un todo único e idéntico. Ahora bien, tal es la naturaleza de la proporción..."

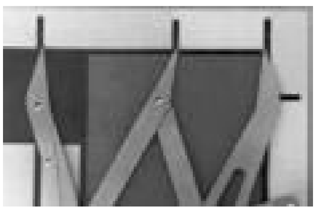
Platón, *"Timeo"*

No fue un deseo de novedad lo que motivó que los artistas de la primera mitad del siglo XX desarrollaran un arte nuevo. Las actitudes hacia lo que era la realidad y el propósito del arte mismo dieron a la primera generación de artistas abstractos el impulso para realizar la histórica ruptura con el arte figurativo. Abandonar el tema reconocible, fue toda una filosofía. La abstracción era una evasión de la realidad. Ellos consideraban al mundo real como demasiado accidental: la guerra, la violencia, las tiranías...; por el contrario la verdad interior no es accidental, es simple, por lo tanto, geométrica.
"La razonada estructura de la cosa y no su apariencia" fue lo que llevó a Piet Mondrian (1872-1944) a adoptar esas líneas rectas que se unían en ángulos también rectos. Pensaba que el ángulo recto era la expresión objetiva perfecta de las relaciones dinámicas de la naturaleza. Tan vivamente creía Mondrian en la pureza del ángulo recto que no se permitía introducir una diagonal en su composición. Antes que eso, dio un giro de 45° a su pintura, por lo tanto las líneas trazadas seguían siendo ortogonales para el observador.



En "Composición en blanco y negro" (1925) no sólo le es fiel a sus principios sino que retoma los valores que Luca Pacioli llamara "*divina proporción*" o Leonardo da Vinci "*sección áurea*".

A través de la geometría dinámica realizaremos un análisis de esta pintura en particular, y proponemos verificar la presencia de estos trazados geométricos en otras obras del autor.

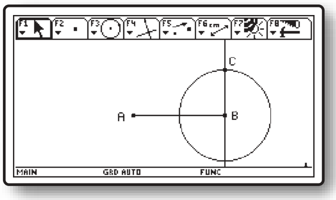


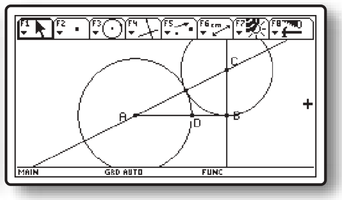
"Composición en rojo amarillo y azul",
Piet Mondrian 1926

Primera construcción

Realizamos la construcción geométrica de la sección áurea o proporción Φ.

1) Dado el segmento AB trazamos la perpendicular al mismo, por B.
2) Con centro en B y radio en el punto medio del segmento trazamos una circunferencia de manera que quede determinado el punto C, sobre la recta perpendicular: (Ocultamos la circunferencia y el punto medio)
3) Trazamos la circunferencia con centro en C y radio CB; y la recta que una el punto A con el C. Marcamos punto de intersección entre ambas.
4) Con circunferencia llevamos ese punto de intersección sobre el segmento. Quedó determinado el punto D.



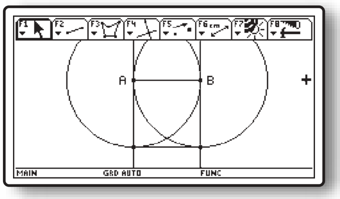


El segmento AB quedó dividido en dos partes desiguales de tal modo que la razón entre la menor y la mayor es igual a la razón entre esta última y la suma de las dos: Φ = 0,618... ó $1/\Phi$ = 1,618... Razón áurea.
Realizamos la macro de esta construcción para utilizarla luego.
1) Objeto inicial: punto A y punto B
2) Objeto final: punto D.
3) Definimos la macro.

Segunda construcción

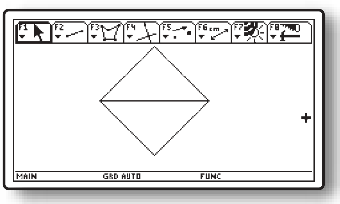
Dado un segmento AB, construimos un cuadrado y lo definimos como polígono.

Realizamos la macro de esta construcción.
1) Objeto inicial: punto A y punto B
2) Objeto final: el cuadrado.
3) Definimos la macro.



Vamos a utilizar estas dos macro para trabajar sobre la pintura de Piet Mondrian "Composición en blanco y negro".

1) Con la opción polígono regular construimos un cuadrado y lo colocamos a 45°.

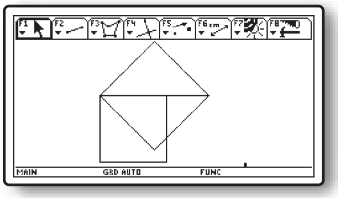


2) Trazamos la diagonal horizontal del mismo.
3) Con la macro "razón áurea" dividimos la diagonal en media y extrema razón.

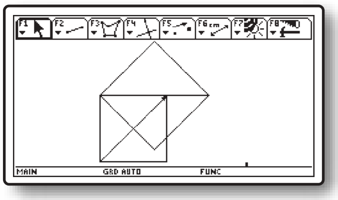
La geometría de la estética

Continuación

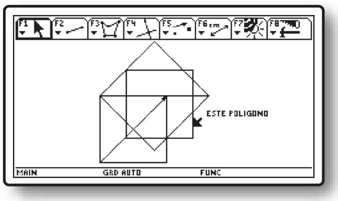
4) Con la macro "cuadrado de lado dado" construimos el cuadrado determinado por el mayor de los segmentos en los que quedó dividida la diagonal.



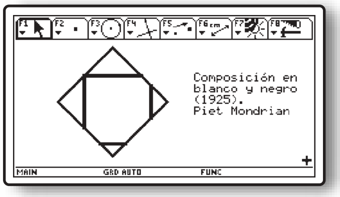
5) Trazamos la diagonal de este nuevo cuadrado y la volvemos a dividir según la razón áurea.



6) Definimos un vector que nos permita superponer los puntos que dividieron las diagonales de ambos cuadrados y trasladamos el cuadrado según este vector.



7) Ocultamos las construcciones, redefinimos los segmentos que quedaron determinados en el interior del cuadrado original y modificamos su grosor.



Consideramos que abordar conceptos geométricos a partir de cuestiones relacionadas con el arte, permite a los alumnos "hábiles" en geometría, entender arte; así como leer aspectos del arte a través de la geometría permite a los alumnos sensibles al arte, entender geometría.

Bibliografía

Alicia Fayó y M. Cristina Fayó, *Cabri –Classe II*, Ediciones Look Impresiones Argentina

Albert Essen, *Los propósitos del arte*, Ediciones Aguilar España.

Matila Ghyka, *Estética de las proporciones de la naturaleza y en las artes*, Ediciones Poseidón España

Nikolaus Pevsner, *Los orígenes de la arquitectura moderna y del diseño*, Ediciones Gustavo Gili S.A, España

Las abejas geométricas

Liliana del Carmen Vargas Villar
lilyvv@starmedia.com

Introduccion

La naturaleza, con su belleza, colores y formas perfectas nos invita a descubrir la geometría de un modo interesante que nos puede llevar a comprender y maravillarnos de la precisión y exactitud con la que está diseñado cada elemento. El estudio de ella nos permite dar respuesta a tantas interrogantes como ¿él por qué de la forma de una burbuja de jabón? ¿por qué la forma de una gota de agua? etc.

En éste caso nos hemos preguntado ¿Qué ha llevado a las abejas a construir las celdas de sus panales en forma de hexágono, consiguiendo así un aprovechamiento matemático perfecto del espacio? ¿el instinto, la selección natural o quizás existió alguna vez la abeja matemática que las iluminó en el camino de la geometría?

El uso de la tecnología como la calculadora Voyage™ 200 nos facilita el trabajo para representar las formas geométricas presente en el panal como la estrada y disposición de los fondos y realizar demostraciones que nos lleven a comprobar la relación entre las medidas de perímetro, área y volumen de las celdas.

Las abejas Geométricas

Salvajes o domésticas, las abejas forman grupos permanentes para poder reunir hasta 50.000 individuos dentro de una colmena, cada abeja efectúa un trabajo preciso e indispensable a la comunidad.

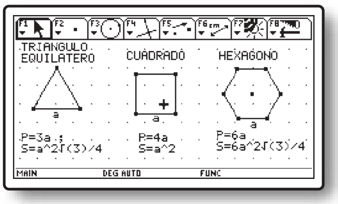
Las obreras construyen los panales, con un perímetro de radio de cera en forma de hexágono, para hacerlo ellas establecen dentro del espacio aún libre una cadena en un plano vertical agarrándose unas con otras por las patas justo hasta un soporte fijo.

La fabricación del pastel de cera – un trabajo en cadena

Las pequeñas albañiles se unen las una a las otras de manera de formar varias cadenas colgantes. Pues ellas se pasan de pata en pata las pequeñas bolitas de cera, amasada y traslúcida que sirven para construir las paredes de cada sección del panal.

Las abejas depositan su miel en las alvéolas de forma geométrica regular, sus secciones representan una teselación del plano superficial del pastel de cera con polígonos regulares.
Estos polígonos son siempre hexágonos. Desde mucho tiempo los hombres han buscado el por qué de ésta forma tan particular. He aquí la respuesta más comúnmente aceptada.

- Verificar (por ejemplo realizando ensayo de construcción) que estos insectos no tienen más elección que tres tipos de polígonos regulares para completar el plano: El triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular.

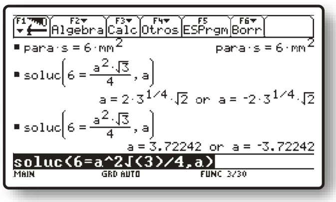


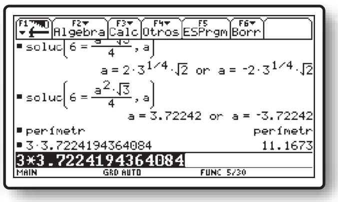
- Nuestras queridas amigas hyménopteras tienen mucho interés por un volumen que les lleve a reducir sus esfuerzos de construcción al mínimo. El problema es entonces el siguiente: Teniendo una sección de área S, cuál forma elegir entre las tres posibilidades encontradas para obtener el más pequeño perímetro P.
- Para los tres tipos de polígonos regulares, llamaremos “a” a la longitud de su lado. Demostraremos entonces que se puede obtener entonces los resultados siguientes.

Justificación de la Dama Naturaleza

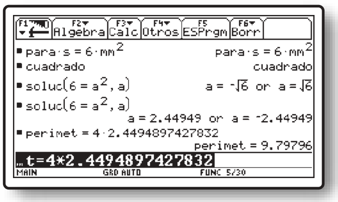
Imaginemos que queremos encerrar un **superficie de 6mm²** estudiaremos cual de estas tres figuras tiene el perímetro más pequeño.

1) **Triángulo equilátero**
Utilizando la Voyage™ 200 podemos descubrir la mediada del lado del triángulo. Llamaremos “a” al lado.

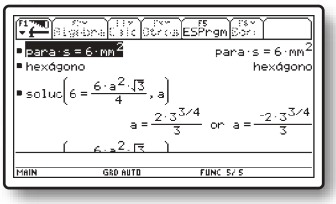


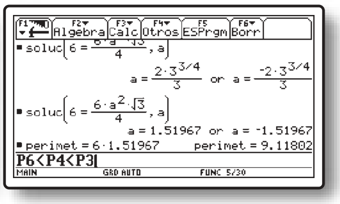


2) **Cuadrado**
Para un cuadrado de lado “a” tenemos:



3) **HEXAGONO**
Para el Hexágono de lado “a” tenemos:



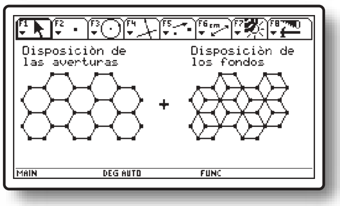


Luego tenemos que para una superficie de 6mm², el triángulo tiene un perímetro de 11.1mm, el cuadrado tiene un perímetro de 9.8mm y el hexágono un perímetro de 9.1mm aproximadamente.

De éste modo resulta que $P_6 < P_4 < P_3$ **¡SABIA NATURALEZA! El Hexágono es el de mayor área y menor perímetro.**

Curiosidad Geométrica

Al examinar un panal de cera construido por las abejas para depositar la miel, constatamos que está constituida por dos alvéolas yuxtapuesta por el eje horizontal y la abertura con la forma de un hexágono regular.
Existen dos series de celdas de cera que se juntan por los fondos.

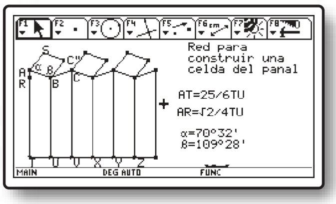


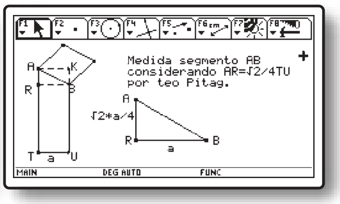
Construcción de las alvéolas

El cuerpo de las alvéolas se compone de un prisma hexagonal recto. El fondo no es plano es una fase cóncava formada por tres rombos con un vértice común.
Cada celda se puede de éste modo adosar a tres celdas de la serie opuesta teniendo cada una contra otra un rombo común. Los ángulos de los rombos son respectivamente de un valor de 109° 28’ y 70° 32’, el lado del Hexágono mide en promedio 2,71 milímetro y 11,3 milímetros de profundidad.

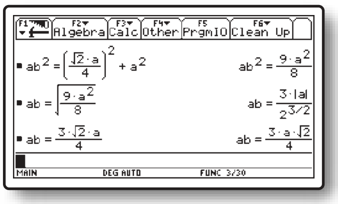
Construcción de Maqueta del Panal y deducción de ángulos.

Podemos diseñar y construir las celdas del panal utilizando la proporcionalidad de los lados y las medidas de los ángulos de los rombos de los fondos.

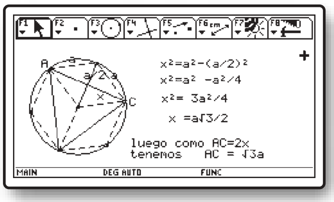


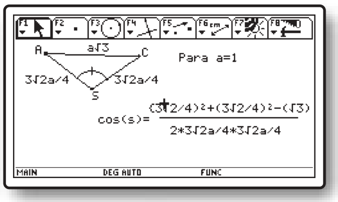


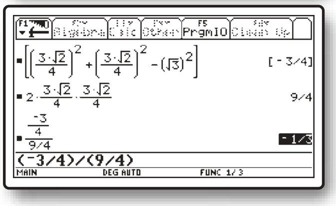
Considerando la proporcionalidad que existe entre el lado del Hexágono y la profundidad de la celda $\frac{AT}{TU} = \frac{25}{6}$, además que $AR = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot TU$, podemos calcular la medida del segmento AB.



El fondo de la celda se encuentra inscrito en una circunferencia, la que nos permite calcular la medida de la diagonal mayor de uno de los rombos y descubrir el valor de los ángulos de los rombos que se forman en el fondo de las celdas.







Como $\cos(s) = \frac{-1}{3}$ entonces el ángulo mide 109°28′ de lo que podemos deducir que el ángulo menor mide 70°32.

Conclusion

En este artículo se ha mostrado como se puede utilizar la calculadora Voyage™ 200 para descubrir como están presente las propiedades geométricas en la naturaleza y como podemos representar las formas geométricas utilizando Cabri Geometry. El uso de la tecnología nos facilita y nos ayuda a presentar la geometría en forma más dinámica e interesante, invitando a los alumnos a trabajar más motivados y con mejores resultados.

Bibliografía

Gérard Audebert, *La perspective Cavaliére*, Publicación de l´A.P.M.E.P. Lyon 1990

Michel Carral, *Géometrie*, Editorial Elipses, París 1995

Carmen Arriero, Isabel García, *Descubrir la geometría del entorno*, Narcea, S.A. de ediciones, Madrid 2000

Simulación de un motor de corriente directa con Voyage™ 200

Ing. Francisco José Terrón Díaz
fterron@ti.com

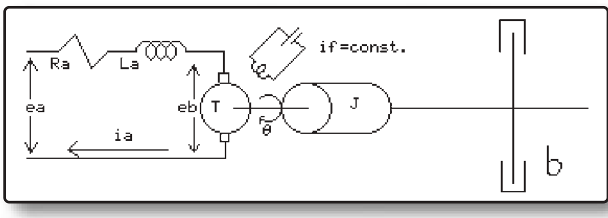
El presente documento muestra una forma diferente de como resolver ecuaciones diferenciales haciendo un comparativo entre un software de computadora y el sistema que utilizan la TI-89, TI-92 Plus y Voyage™ 200.

Sistema electromecánico

El sistema electromecánico utilizado es un motor de corriente directa de imán permanente generalmente los motores de corriente directa son los dispositivos que más se utilizan para generar movimiento rotacional el cual moverá una máquina, un vehículo o un robot, al hablar del comportamiento en un motor de corriente directa significa ver como el motor aumenta la velocidad a determinado voltaje de alimentación o como es que la corriente sufre un cambio en cierto tiempo etc. Pero lo más interesante es ver como una ecuación y los coeficientes que esta tiene dependen de parámetros físicos reales como viscosidad, fricción viscosa, resistencia de armadura entre otras. Todo esto puede ser realizado en forma práctica es decir, tener un motor físicamente, alimentarlo y por último observar las variables con un instrumento de medición. Las simulaciones permiten conocer el comportamiento de sistemas físicos sin llevar a la práctica el experimento. El uso de la Voyage™ 200 nos da la posibilidad de simular la mayoría de sistemas físicos que son utilizados en las clases de Ingeniería.

Motor de corriente directa controlado por armadura

En la figura se muestra el circuito equivalente para el motor de corriente directa, nótese que el campo magnético es constante.



Motor de corriente directa

Simulación de un motor de corriente directa con Voyage™ 200

Continuación

Haciendo la manipulación y sustituciones adecuadas se encuentran las siguientes ecuaciones diferenciales:
Ecuación diferencial del circuito de armadura.

(1) $L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \frac{d\theta}{dt} = e_a$

Ecuación diferencial del Torque

(2) $T = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} = K_m i_a$

Representación en variables de estado del modelo del motor de corriente directa

Un sistema de ecuaciones diferenciales puede ser representado por medio de matrices las cuales muestran los estados, la entrada y la salida del sistema, el equivalente es mostrado de la siguiente manera:

(3) $X_1' = X_2$

$$X_2' = \frac{KX_3}{J_m} - \frac{b_m}{J_m} X_2$$

$$X_3' = \frac{e_a}{L_a} - \frac{K_b}{L_a} X_2 - \frac{R_a}{L_a} X_3$$

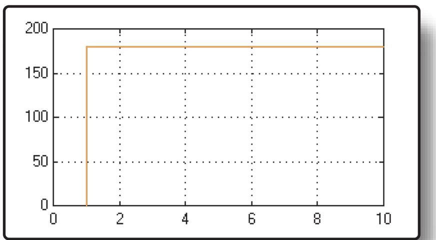
Toca ahora conocer las matrices del sistema (3), las matrices resultantes son las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_m}{J_m} & \frac{k}{J_m} \\ 0 & -\frac{k_b}{L} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} e_a$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

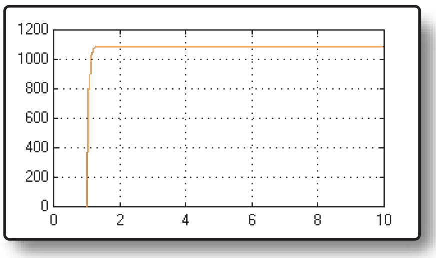
Simulación con MATLAB*

La simulación es simplemente la grafica correspondiente del estado que deseamos conocer o en lenguaje matemático encontrar la solución a la ecuación diferencial, en cuanto al programa MATLAB en el documento solo se enfocara en los resultados que el programa presenta.

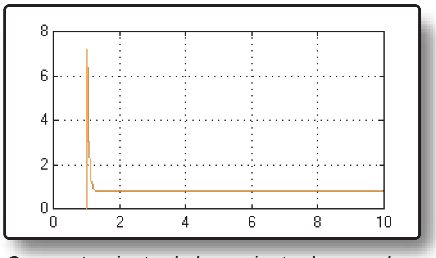


Alimentación del motor

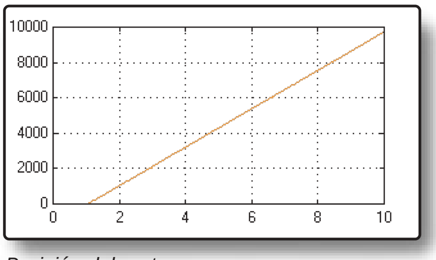
*http//:www.mathworks.com



Velocidad alcanzada por el motor



Comportamiento de la corriente de armadura



Posición del motor

Solución del sistema de ecuaciones diferenciales con Voyage™ 200

Los resultados del programa MATLAB fueron mostrados. Toca ahora encontrar la misma solución con la Voyage™ 200. En la Voyage™ 200 para introducir una ecuación diferencial de segundo orden (o de orden superior hasta de noveno orden), se debe transformar a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por ejemplo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = e^t$$

o

$$y'' + y' + y = e^t$$

Después se despeja la derivada de orden superior

$$y'' = e^t - y' - y$$

Y se definen los siguientes estados

$y1 = y$

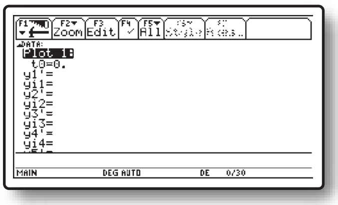
$y2 = y'$

Por lo tanto

$y1' = y2$

$y2' = e^t - y' - y$

En la figura se muestra el editor ocupado para la Voyage™ 200, a medida que se incrementa el número de estados estos van apareciendo en orden ascendente.



Editor para la Voyage™ 200

La representación en espacio de estado del modelo del motor de corriente directa se muestra a continuación pero es necesario cambiar al formato utilizado en el editor de la Voyage™ 200; se puede observar de esto que la edición de las ecuaciones diferenciales en la Voyage™ 200 tienen que convertirse a un sistema de primer orden que finalmente es utilizar variables de estado.

$$X_1' = X_2 \qquad\qquad y_1' = y_2$$

$$X_2' = \frac{KX_3}{J_m} - \frac{b_m}{J_m}X_2 \qquad \text{Cambiar por} \qquad y_2' = \frac{Ky_3}{J_m} - \frac{b_m}{J_m}y_2$$

$$X_3' = \frac{e_a}{L_a} - \frac{K_b}{L_a}X_2 - \frac{R_a}{L_a}X_3 \qquad\qquad y_3' = \frac{e_a}{L_a} - \frac{K_b}{L_a}y_2 - \frac{R_a}{L_a}y_3$$

Después Cambiar los valores de K, L_a, b_m etc.

L_a=0.112 H

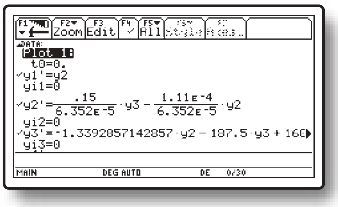
R_a=21Ω

J_m=0.00006352 Kg.m^2

b_m=0.000111 N.m

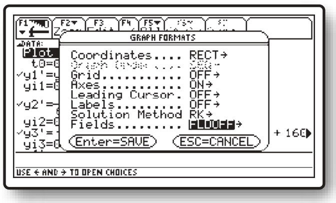
$K=k_b$=0.15 N.m/A

Y colocar cada uno de los estados en el editor como se presenta en la figura, se debe tener presente que e_a es la alimentación para el motor.



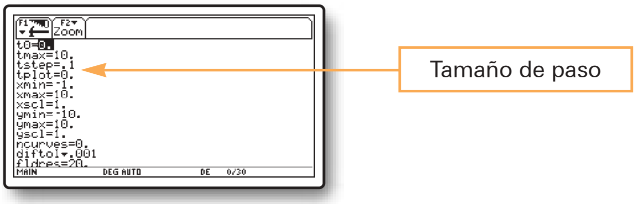
Editor para la Voyage™ 200

Para activar el estado que se quiere graficar se indica por medio del cursor y se oprime la tecla F4. Para resolver cualquier sistema de ecuaciones o cualquier ecuación diferencial tiene que darse de alta el formato de como van a ser las condiciones para mostrar la solución, por ejemplo que método de solución se va a ocupar RK o EULER si se quiere mostrar el campo de pendientes o de direcciones o de lo contrario desactivarlo, activar ejes y etiquetas etc. En la figura se muestran los diferentes formatos.

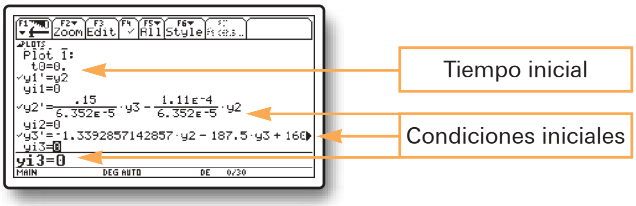


Pantalla mostrando las opciones de format

Una parte muy importante en el momento de encontrar una solución en cualquier ecuación diferencial es el valor de los ejes o de la ventana (WINDOW) también para dar de alta estos valores existe un editor en el se pueden cambiar valores para el eje Y, el eje X además de la variable t y el tamaño de paso ya que como la Voyage™ 200 utiliza un método numérico requiere por lo tanto esta constante, se debe tener cuidado en la elección del tamaño de paso ya que si este es demasiado pequeño la solución puede tardar bastante en cambio si este es grande la solución es mas rápida pero se pierde precisión. Otra cosa que debe editarse son las condiciones iniciales las cuales son accesibles en la misma parte donde se editan los estados de nuestro sistema, la figura muestra el editor y las correspondientes condiciones iniciales.



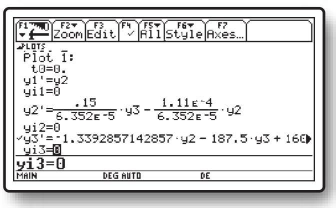
Cambios para el tamaño de paso



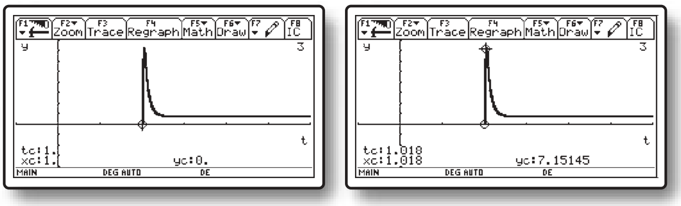
Pantalla para dar de alta las condiciones iniciales

Para la solución o simulación de nuestro sistema todas las condiciones iniciales valen cero.

Ahora si, dadas las condiciones iniciales y el formato ocupado para la solución de nuestro sistema vamos a activar a nuestro primer estado y3', para activar este estado debemos movernos a el por medio del cursor y oprimir F4, se debe tener en cuenta que los otros dos estados deben estar desactivados, los resultados para esta primer simulación se presentan a continuación en la figura junto con la pantalla mostrando los 2 estados desactivados y el estado activado.

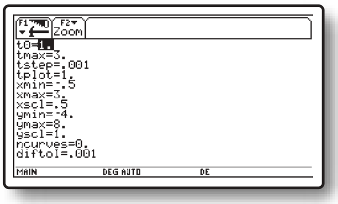


Editor de la calculadora eligiendo y3'



Resultados al graficar y3'

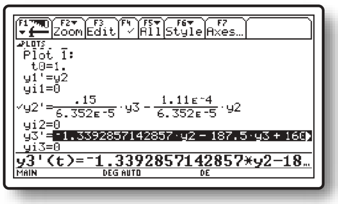
Los valores de ventana para esta gráfica se muestran en la siguiente figura



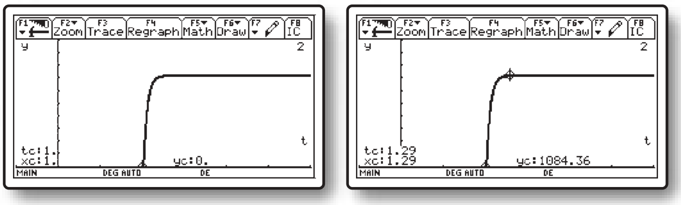
Valores para window

Al elegir el estado y3' nosotros estamos simulando el comportamiento de la corriente de armadura del motor, al igual que en MATLAB tenemos la misma aproximación; para esta primer simulación se utiliza un tamaño de paso de 0.001 pero este puede ser cambiado a 0.1 de esta manera es más rápido el trazo de la solución.

A continuación vamos a elegir el estado y2', la velocidad del motor, igual que para y3' primero se debe activar el estado y2' con F4 en la figura siguiente se muestra el editor y el trazo de la solución.

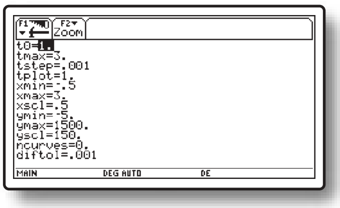


Editor de la calculadora eligiendo y2'



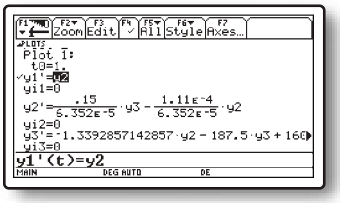
Resultados al graficar y2'

Los valores de ventana para la solución se presentan en la figura siguiente

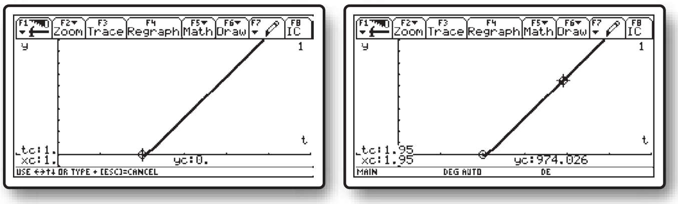


Valores para window

Se observa como la velocidad aumenta y llega a un valor donde se estabiliza también como en el caso de la corriente de armadura llegamos al mismo trazo como con MATLAB.
Por ultimo grafícamos la posición para hacer esto se elige el estado y1', los resultados y la activación de este estado se presentan en las siguientes figuras.

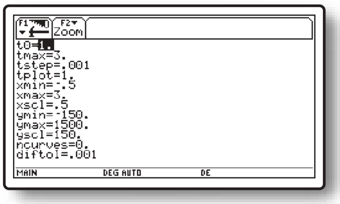


Editor de la calculadora eligiendo y1'



Resultados al graficar y1'

Los valores de ventana



Valores para window

También para este estado tenemos el trazo como en MATLAB y se puede observar como a medida que se incrementa el tiempo la posición del motor cambia incrementándose con un comportamiento lineal.

Bibliografía

Modern Control Engineering, 4/e
Katsuhiko Ogata
Prentice Hall
Feedback Control of Dynamic Systems, 4/e
Gene F. Franklin, J. David Powell, both of Stanford University
Abbas Emami-Naeini, all of Stanford University
Prentice hall

Conozca el editor

Continuando con la sección "Conozca el Editor", les queremos presentar al profesor de Chile Marco Barrales Venegas quien, en el año 1983 ingresó a la carrera de Pedagogía en Matemática de la Universidad de Concepción de Chile, obteniendo una sólida formación en la especialidad y en la didáctica de la enseñanza de la matemática, lo cual le permitió realizar ayudantías desde los primeros años de estudio. En el año 1990 ingresa como docente al Colegio Alemán de Concepción, su actual trabajo.
En 1999 obtiene el grado de Diplomado en la Enseñanza Experimental de la Matemática. Este nuevo cúmulo de conocimientos, adquirido durante dos años en la Universidad de Concepción, le permitió ganar un concurso de proyectos de la Sociedad de Matemática de Chile y una pasantía en la IUFM de Toulouse, Francia y luego en München, Alemania. Es en Toulouse donde conoce la tecnología de Texas Instruments y desde entonces la ha incorporado en su quehacer educativo para la enseñanza de la matemática y las ciencias. Ha desarrollado innovadores proyectos de uso de tecnología portátil con el apoyo y asesoría de Texas Instruments. Él dice: "El uso de tecnología en el aula es cada día más aceptada y el profesorado ha comenzado a utilizarla, por lo cual, es necesario modificar los programas y capacitar a los docentes para que se sientan seguros, no teman equivocarse y lo más difícil es que sepan integrarlas en el currículo, aplicándolas de manera adecuada, lo que implica cambios en su enfoque didáctico y en la metodología que utilizan en su clase". Este concepto es la base de sus artículos y talleres que dicta regularmente.

Ha organizado y participado de reuniones Latino-americanas, encuentros de matemática, charlas, talleres y ha formado grupos de trabajo continuo, lo cual le permite compartir con los colegas del país proyectos e ideas, buscando soluciones a la ardua tarea de enseñar.

Su dedicación en el uso de la calculadora simbólica y gráfica (Voyage™ 200 y TI-83 Plus) le permitió participar en la Conferencia Internacional de T^3 en Calgary, Canadá. Al año siguiente (2003) presentó un trabajo sobre análisis y geometría en la Voyage™ 200, en la conferencia realizada en Nashville, E.E.U.U. Actualmente es instructor de T^3 para Chile y formador de maestros en la Universidad San Sebastián de Concepción.

Así como en los tiempos de Descartes y Fermat la correspondencia fue un elemento motivador que les permitió compartir nuevos conocimientos sin importar distancias, el profesor Barrales no puede concebir en estos tiempos un crecimiento intelectual sin el intercambio de experiencias vía correo (e-mail) por medio del cual ha podido conocer a matemáticos, educadores e investigadores, entre los que se encuentran académicos de Chile, Brasil, Argentina, México, Costa Rica, Francia, España, E.E.U.U. y muchos profesores de escuelas y establecimientos municipales, quienes juntos y sin egoísmos comparten experiencias de aula, proyectos, material de clases, apuntes, etc.
La matemática lo mantiene intelectualmente activo, porque siempre hay algo nuevo que aprender.

Cómo suscribirse para recibir ésta revista

www...

Visite el sitio
education.ti.com/latinoamerica/revista
y llene la forma de suscripción.
Tiene la opción de recibir la revista vía e-mail o por correo postal.

Innovaciones Educativas está disponible de forma electrónica en el sitio de Texas Instruments. Baje la última versión desde:
education.ti.com/latinoamerica/revista

@...

o Envíe la siguiente información vía e-mail a
ti-cares@ti.com

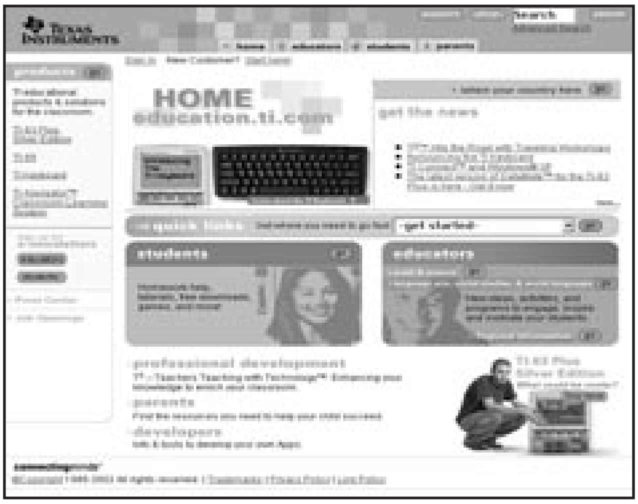
- Nombre Completo:
- Título / Cargo:
- Nombre de su escuela:
- Dirección física completa:
- E-mail

Internet y Eventos Educacionales

En el sitio education.ti.com encontrará una variedad de recursos educacionales para matemáticas, ciencias y otras asignaturas. Estos recursos incluyen las últimas novedades en aplicaciones de software para calculadoras, programas, apoyo a profesores, artículos, actividades para el aula, libros, videos y mucho más.

Para información en español visite:

education.ti.com/latinoamerica



Internet

En los siguientes sitios encontrará software, juegos, emuladores, información sobre los algoritmos usados por TI, sistemas operativos que posibilitan la programación de las calculadoras y muchos otros datos de interés. Cada sitio es responsable de los contenidos de la misma y Texas Instruments no tiene responsabilidad alguna sobre ninguna de ellas.

http://mathforum.org/dynamic/cabri.links.html

http://jcpti89.free.fr/programmesang.php

www.ticalc.org

http://www.emu4ever.com/emuladores/calculadoras/ti2.htm

http://membres.lycos.fr/frejunic/ti89/index.html

http://zemok89.free.fr/

http://www.sinewton.org/elrincon/

http://www.ti-mania.fr.st/

http://membres.lycos.fr/crazyti/

http://www.cabri.com

http://www.start.at/doors

http://www.geocities.com/tiespjar/principal.htm

http://wild.fire.free.fr/

http://ti89clairnet.free.fr/prog.htm

http://cientec.or.cr/matematica/festival.html

http://www.campus-oei.org/oim/xvisimp.htm

http://www.edumat.com.ar/

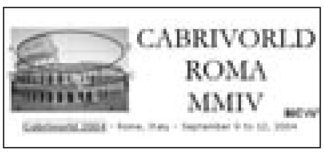
http://www.hsu.edu/faculty/lloydm/ti/prgmtabl.html

http://ti89prog.kevinkofler.cjb.net/

http://tiger.towson.edu/~bbhatt1/ti/beta/MPL.htm

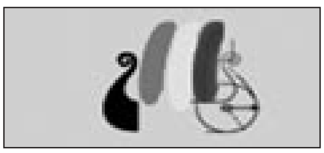
http://www.paxm.org/symbulator/download/index.html

Eventos Educacionales



http://www.cabriworld.com/

http://www.cima.uadec.mx/cabri/index.html



http://www.icme-10.dk/

Texas Instruments

innovaciones educativas