Texas Instruments

ConnectingMinds™

Innovaciones Educativas

Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias

education.ti.com

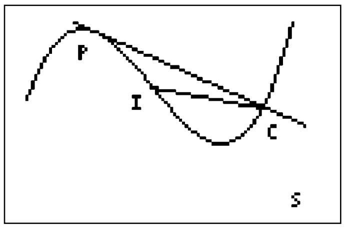
Contenido

Tercera Edición – 2002

Dr. Maxine Lifshitz, Friends Academy, Locust Valley, NY

Enigma Cúbico

Dado el polinomio cúbico y su punto de inflexión "I". Dibuje una línea tangente a la curva en el punto P y extienda la línea hasta que intersecte la curva nuevamente en el punto C. Dibuje la línea que llamaremos IC. Demuestre que el radio del área encerrada por líneas PC e IC y la curva que llamamos A_1, comparada con el área encerrada por la línea IC y la curva que llamamos A_2, es igual a $^{11}/_{16}$.



Aquí se ilustra la cúbica **$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 12$.** P tiene coordenadas (-2.5, 89.5), I tiene coordenadas (-0.5, 30.5), y C tiene coordenadas (3.5, 8.5). La región en forma triangular PIC tiene área A_1, y la región dentro de línea IC y la cúbica tiene área A_2. La ecuación de PC es **$y = -13.5\ (x + 2.5) + 89.5$**, y la ecuación de IC es **$y = -5.5\ (x + 0.5) + 30.5$**.
$A_1 = 88$ y $A_2 = 128$, entonces el radio de las dos es igual a $^{11}/_{16}$.

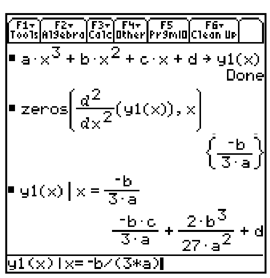
Los polinomios cúbicos tienen muchas propiedades interesantes, que se pueden verificar con la TI-89 o TI-92 Plus:

1. El punto de inflexión es el punto medio del segmento de la línea que conecta el extremo relativo. (Existe un script que prueba esta propiedad en la página 54 del libro: *AP Calculus with the TI-89* de la serie de libros EXPLORATIONS™ de Texas Instruments).
2. Las regiones encerradas por la línea que une los dos extremos relativos y la curva tienen la misma área.
3. Si se dibujan líneas tangentes horizontales sobre los dos extremos relativos hasta que éstas intersectan la curva, las regiones encerradas por cada una de estas tangentes horizontales y la curva tienen la misma área.

Ahora regresemos al problema mencionado inicialmente. Dejemos que la ecuación del polinomio cúbico sea de la forma siguiente: **$y1\ (x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$** donde a, b, c, y d son constantes, con $a \neq 0$

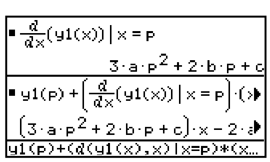
Sean las coordenadas del punto de inflexión I igual a

$$\left(\frac{-b}{3a}, y1\left(\frac{-b}{3a}\right)\right).$$

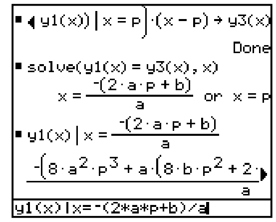


Asumamos que la ecuación de una línea tangente a y1(x) en el punto P (p, y1(p)) sea **y3(x) = y1(p) + (d(y1(x),x)|x=p)(x-p)**.

(Note que las flechas apuntando a la derecha -en las pantallas que se muestran a continuación- indican que la expresión continúa).



Si la línea tangente intersecta a y1(x) en P y otro punto en C, podemos encontrar las coordenadas de C de la forma siguiente: **solve(y1(x)=y3(x),x)**.



Entonces las coordenadas de C son

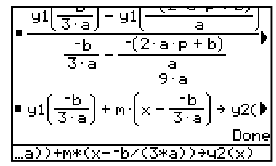
$$\left(\frac{-(2ap+b)}{a}, y1\left(\frac{-(2ap+b)}{a}\right)\right)$$

Finalmente, dejemos que la ecuación de la línea IC que une el punto de inflexión y el punto C sea:

$$y2(x) = y1\left(\frac{-b}{3a}\right) + m\left(x - \left(\frac{-b}{3a}\right)\right)$$

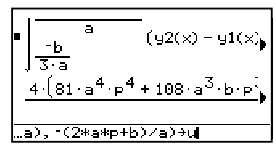
donde

$$m = \frac{y1\left(\frac{-b}{3a}\right) - y1\left(\frac{-(2ap + b)}{a}\right)}{\frac{-b}{3a} - \left(\frac{-(2ap + b)}{a}\right)}$$



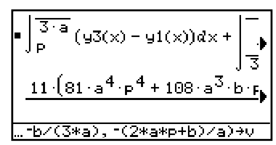
Ahora encontramos el área A_2 acotada por la línea IC y la curva y1(x) y guardamos este valor en u:

$$\int\left(y2(x) - y1(x), x, \frac{-b}{3a}, \frac{-(2ap + b)}{a}\right) \rightarrow u$$

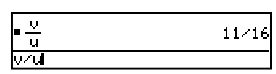


Entonces encontramos el área A_1 acotada por la línea PC, la línea IC, y la curva y1(x), y guardamos este valor en v

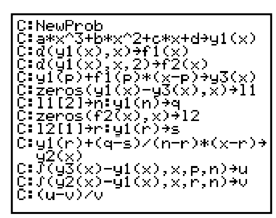
$$\int\left(y3(x) - y1(x), x, p\ \frac{-b}{3a}\right) +$$
$$\int\left(y3(x) - y2(x), x, \frac{-b}{3a}, \frac{-(2ap + b)}{a}\right) \rightarrow v$$



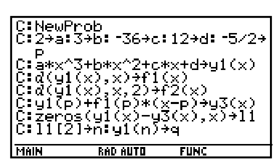
Ahora podemos escribir v/u y entonces encontramos $v/u = {}^{11}/_{16}$.



George Best (autor del libro *AP Calculus with the TI-89*) escribió un script en la TI-89 para esta propiedad cúbica. Note su uso de listas para guardar y obtener las soluciones a las ecuaciones.



El ejemplo al comienzo de este artículo se puede hacer por medio de modificar el inicio del script como se muestra a la derecha.



Los scripts (archivos de texto con una secuencia de entradas) son una de las herramientas más poderosas para enseñar que tiene la TI-89 y la TI-92 Plus. Hay buenos tutoriales en scripts en el libro guía de las calculadoras y en el libro *AP Calculus with the TI-89*, páginas 52-53.

Carlos Cortés Zavala & Eugenio Díaz Barriga Arceo

Ya tengo el software... y ¿ahora qué?

El siguiente escrito es la continuación del artículo llamado ***"enseñar la demostración en geometría vs* enseñar *la demostración en geometría"*** (Cortés, C., Díaz Barriga, E.); En ese artículo planteamos la posibilidad de transitar de un modo de enseñanza a otro, a través del uso del software. Aquí le propondremos algunas de las posibilidades. para ello estaremos trabajando con el Cabri Géomètre II™[1]. Le vamos a mostrar: los requisitos técnicos de hardware necesarios para usarlo, cómo lo podemos usar, qué podemos hacer con el software y algunas actividades con él.

Requisitos técnicos de hardware para usarlo

El Cabri-Géomètre existe para plataforma Macintosh® y compatibles con PC, dentro del segundo tipo hay Cabri-Géomètre para DOS y para Windows™ 95 o versiones más recientes. Le daremos los requisitos técnicos para cada una de las plataformas. Pero antes de eso le diremos que es un software que ocupa muy poco espacio de disco duro, aproximadamente 2Mb en cualquiera de las plataformas.

- **Cabri-Géomètre para Macintosh**
  Es posible correr este software en computadoras con procesador 680x0 o PPC. La versión actual es la de Cabri Géomètre II lo cual hace que la interface que presenta sea la misma practicamente que la versión II para DOS.
- **Cabri-Géomètre para DOS**
  Se puede ejecutar ¡hasta en máquinas con procesador 286! que cuenten con monitor VGA y un mínimo de memoria RAM de 2 Mb. Existen dos versiones la I que difiere grandemente con la versión II, esta última es a la que haremos referencia en este artículo y la cual le aconsejamos, ya que incorpora gran cantidad de opciones y herramientas en su interface que no tiene la versión I. Esta versión también puede ser ejecutada bajo Windows 95 o versiones más recientes.
- **Cabri-Géomètre para Windows 95 o versiones más recientes**
  Necesita tener instalado Windows 95 o una versión más reciente, por lo cual requiere mínimo una computadora con procesador 486 Sx y 4 Mb de memoria RAM, también necesita aproximadamente 2 Mb libres en su Disco Duro. Para Windows 95 o versión más reciente, es la versión de Cabri Géomètre II 1.0, es decir que presenta la misma interface que la versión II para DOS, más las ventajas propias de Windows 95 o versiones más recientes como tener varias ventanas abiertas, compatibilidad con otras aplicaciones, por ejemplo Word etc..

La interface de la versión de Cabri Géomètre II, en cualquiera de sus plataformas, no tiene diferencias y esto asegura que una vez que lo usamos en una sabremos utilizar el software en cualquiera de las otras sin tener que aprenderlo nuevamente (gran ventaja para el usuario que este software no tenga la filosofía de Microsoft).

[1] Cabri-Géomètre software de geometría dinámica y manipulación directa.

[2] Cuando aparezca un exponente M y/o W se refiere a las opciones de Cabri Géomètre II para Macintosh y Windows 95 respectivamente.

¿Cómo podemos usar el Cabri Géomètre II?

En esta parte del artículo le mencionaremos una introducción rápida de algunas instrucciones básicas para el manejo de este "logiciel". Un comentario antes de entrar a lo anterior; los ingleses han inventado la palabra software para designar a este tipo de instrumentos, los franceses la palabra "logiciel" y más aún para referirse al "logiciel" con propósitos educativos le llaman "didacticiel". En español hemos adoptado, sin más preámbulo, la palabra inglesa. Aquí le proponemos como un experimento dos palabras "logigrama" para el "logiciel" y "didactigrama" para el "didacticiel", es interesante que juntos construyamos nuestro lenguaje ya que el lenguaje se hace cuando se usa. Pasando esta licencia gramatical que nos permitimos, a continuación entraremos a explicar el manejo de este "didactigrama". Primeramente diremos que nos referiremos a la version de Cabri Géomètre II para lo cual explicaremos algunas de las opciones que nos ofrece la interface (**fig. 1**).

Archivos: nuevo, abrir, cerrar, salvar, salvar como, regresar, mostrar dibujo, ajustar página, imprimir y salir[2].

1. Editar: Deshacer, cortar, copiar, pegar, limpiar, seleccionar todo, repetir la construcción y re-dibujar.
2. Opciones: Mostrar atributos, default[M], preferencias, configuración del menú, lenguaje[W], caracteres[W], tipo de letra[M], tamaño[M] y estilo[M] .
3. Ventanas[W]: cascada, mosaico horizontal, mosaico vertical y cerrar todo.

Lo anterior es denominado menú estilo *windows*

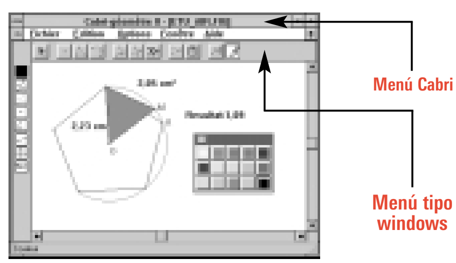


Figura 1

Lo que a continuación se expone es el menú cabri y no existe diferencia en ninguna de las plataformas (**fig.2**). En donde cada uno de los botones al ser oprimidos despliega una serie de opciones (ejemplos ver **fig.3**)

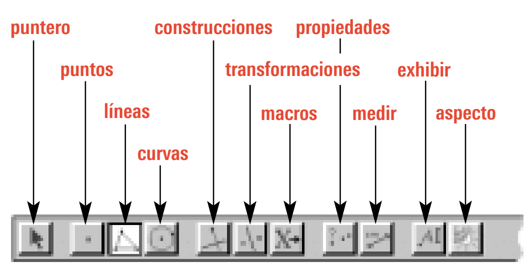


Figura 2

Figura 3

Ya tengo el software... y ¿ahora qué? *(continuación)*

Punteros

Puntero: Seleccionar y desplazar los objetos (translación).
Giro: Gira un objeto sobre su centro de gravedad o de un punto.
Semejanza: Dilata o reduce un objeto alrededor de su centro de gravedad o de un punto.

Giro y Semejanza: Gira y dilata o reduce simultaneamente un objeto alrededor de su centro geométrico o de un punto.

Puntos

Punto: construye un punto eventualmente sobre un objeto o la intersección de dos objetos.
Punto sobre objeto: construye un punto sobre un objeto.

Punto sobre dos objetos: construye el o los puntos de intersección de dos objetos

Líneas

Recta: construye una recta determinada por un punto y una dirección
Segmento: Construye un segmento determinado por dos puntos
Semi-Recta: construye una semi-recta determinada por un punto y una dirección o un segundo punto.
Vector: Construye un vector determinado por dos puntos.

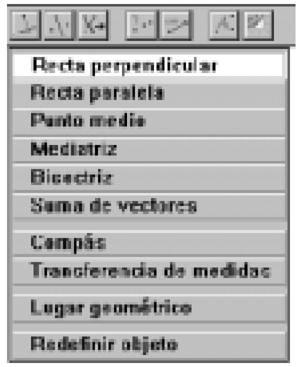
Triángulo: Construye un triángulo determinado por tres puntos.
Polígono: Construye un polígono determinado por **N** puntos.
Polígono regular: construye un polígono regular determinado por

1. Un punto que será el centro.
2. Un punto que marcará el radio
3. Un punto para ajustar el número de lados.

Curvas

Círculo: construye un círculo determinado por dos puntos.
Arco: construye el arco de un círculo determinado por tres puntos
Cónicas: construye una cónica determinada por cinco puntos.

Construcciones



Recta Perpendicular: construye una recta perpendicular a otra dada y que pasa por un punto.
Recta paralela: construye una recta paralela a otra dada y que pasa por un punto.
Punto medio: construye el punto medio de un segmento o entre dos puntos.
Mediatriz: construye la mediatriz entre dos puntos o de un segmento.
Bisectriz: construye la bisectriz de un ángulo por tres puntos o la marca del ángulo.
Suma de vectores: construye la suma de dos vectores señalando los dos vectores y después el origen.
Compás: construye un círculo determinado por un segmento y un punto.
Transferencia de medida: Transfiere una medida a un círculo o semi-recta o vector o eje (en sentido trigonométrico).
Lugar geométrico: construye el lugar de puntos o una envolvente. Se señala primero el objeto dependiente y después el punto del cual depende.
Redefinir un punto: redefine las características geométricas de un punto.

Transformaciones

Simetría axial: construye la imagen de un objeto dentro de una simetría axial. *Se señala primero el objeto y después la recta.*
Simetría central: construye la imágen de un objeto dentro de una simetría central. *Se señala primero el objeto y después el centro.*
Translación: construye la imágen de un objeto dentro de una traslación. *Se señala primero el objeto y después el vector.*
Rotación: construye la imágen de un objeto dentro de una rotación. *Se señala el objeto, el centro y un ángulo definido numérico.*
Homotecia: construye la imágen de un objeto dentro de una homotecia. *Se señala el objeto, el centro y un cociente definido numéricamente.*
Inversión: construye la imágen de un objeto dentro de una inversión. *Se señala primero el punto y después el círculo.*

Macros

Objetos iniciales: Permite definir los objetos iniciales para hacer una macro-construcción.
Objetos finales: Permite definir los objetos finales de una macro-construcción.
Definir Macro: validar la macro-construcción.

Ya tengo el software... y ¿ahora qué? *(continuación)*

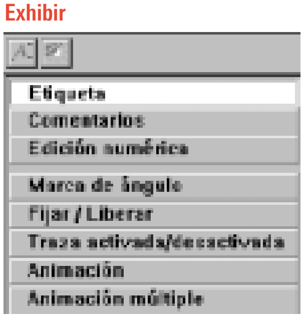
Propiedades

Alineado?: Muestra un texto para responder a la pregunta de alineación de tres puntos.
Paralelo?: Muestra un texto para responder a la pregunta de paralelismo entre dos objetos (rectas, semi-rectas, segmentos, vectores).
Perpendicular?: Muestra un texto para responder a la pregunta de perpendicularidad entre dos objetos (rectas, semi-rectas, segmentos, vectores).
Equidistante?: Muestra un texto para responder a la pregunta de equidistancia de un punto a otros dos puntos.
Pertenece?: Muestra un texto para responder a la pregunta de pertenencia de un punto a un objeto.

Medidas

Distancia y Longitud: mide la distancia de un segmento o entre puntos o el perímetro de un círculo, de una cónica o de un polígono.
Área: mide el área de un disco, de una elipse o de un polígono.
Pendiente: muestra el valor de la pendiente de una recta.
Medir ángulo: mide el valor del ángulo designado por tres puntos o por una marca.
Ecuación y Coordenadas: Muestra la ecuación de una recta o círculo o cónica.
Calculadora: muestra una calculadora.
Tabla: forma una tabla en la cual uno puede introducir valores numéricos.

Exhibir



Etiqueta: permite introducir una etiqueta para designar objetos.
Texto: Permite introducir un texto.
Número: permite editar un número.
Marcar un ángulo: sirve para marcar un ángulo, para lo cual es necesario señalar tres puntos.
Traza Activada/Desactivada: bloquea o desbloquea el movimiento de un punto u objeto.
Trace: permite obtener el trazo del desplazamiento de un objeto.
Animación: sirve para dar animación de un objeto.
Animación Múltiple: permite dar animación conjunta a varios objetos.

Aspecto

Ocultar/Mostrar: oculta o hace visible los objetos de una figura.
Color: permite seleccionar el color de los objetos.
Rellenar: llena los polígonos, círculos y los textos con un color seleccionado.
Grosor: modifica el espesor de las rectas.
Punteado: modifica el aspecto de punteado de un trazo.
Aspecto: modifica el aspecto de ciertos objetos, de puntos, de ángulos, de marcas de longitud etc.
Mostrar ejes: muestra los ejes cartesianos.
Ocultar ejes: ocultar los ejes.
Nuevos ejes: permite definir un nuevo sistema de ejes.
Definir Cuadrícula: muestra un cuadriculado en el plano.

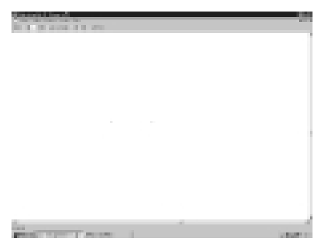
¿Cómo podemos usar el Cabri Géomètre II™?

A continuación daremos un ejemplo sencillo del uso del Cabri, resaltando los comandos que estamos utilizando.

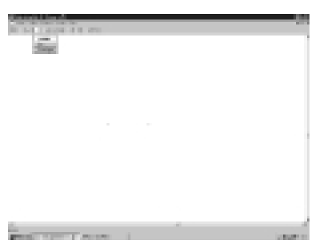
Actividad para introducir el uso de comandos de Cabri:

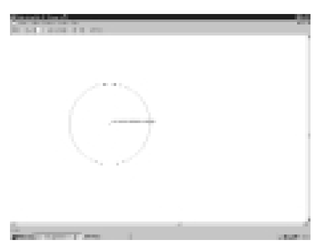
En esta actividad vamos a construir un triángulo equilátero a partir del lado

Construir un segmento. En el menú de rectas seleccionamos segmento (para construirlo deberemos dar dos puntos).



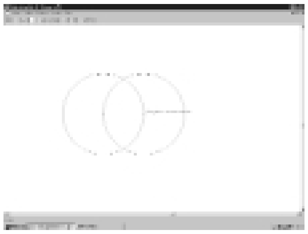
Construir un círculo que tenga como radio el segmento dado. En el menú de curvas seleccionamos círculo (deberemos seleccionar dos puntos que serán el inicio del segmento -centro del círculo- y el final del segmento –radio del círculo).





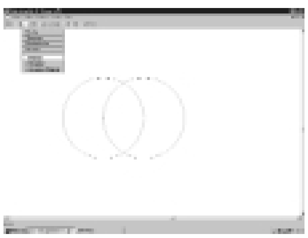
Ya tengo el software... y ¿ahora qué? *(continuación)*

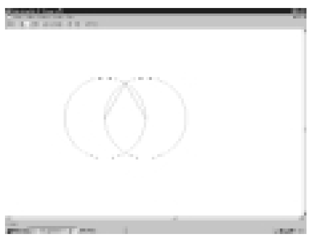
Construir otro círculo que tenga como radio el segmento dado.
Seleccionamos círculo del menú correspondiente. El centro de este circulo será el final del segmento y el radio será el inicio del segmento.



Construir un Triángulo. En el menú de rectas seleccionamos triángulo. debemos dar 3 puntos los cuales serán:

1. inicio del segmento
2. final del segmento
3. punto de intersección de los dos círculos

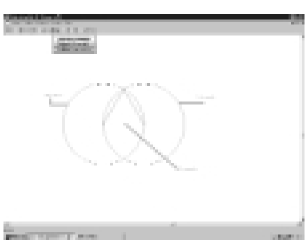


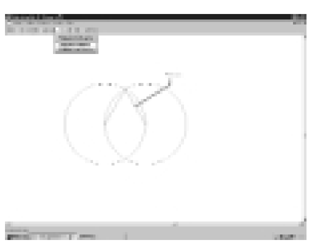


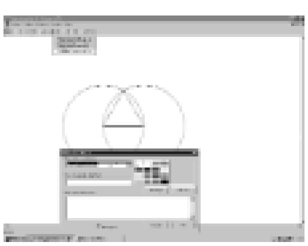
Hacer una macro-construcción. Para realizar una macro-construcción deberemos realizar 3 pasos que son:

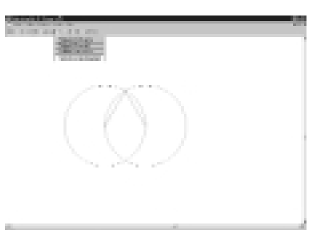
1. Seleccionar todos los objetos iniciales (segmento y los dos círculos).
2. Seleccionar todos los objetos finales (el triángulo).
3. Validar la macro-construcción y definir nombre y aspecto. (ponerle nombre y darle un símbolo de identificación).

Por último, veremos que el menú de macros se ha modificado con esta nueva construcción.









Qué podemos hacer con el software

El entorno Cabri Géomètre II™ cuenta con una gran versatilidad: hacer una lista de todas las cosas que podemos explorar con él es una labor que no tiene fin. En el ámbito estrictamente de las Matemáticas, se pueden mostrar entornos para trabajar geometría sintética, geometrías no-euclideanas (Laborde, 1993; Díaz Barriga, 1996), ecuaciones diferenciales, geometría plana y del espacio (Rousselet, 1996); trabajar las cónicas (Díaz Barriga, 1995); geometría proyectiva (Rousselet, 1996); números complejos (Díaz Barriga, 1995), funciones; problemas de máximos y mínimos sin cálculo (Díaz Barriga, 1995), teselaciones, construcciones con regla y compás (Díaz Barriga, 1995), álgebra lineal, etc. Pero esto no es lo único para lo cual se emplea Cabri Géomètre II: los físicos lo utilizan para generar entornos donde simular y explorar conceptos de astronomía (Aragón, 1996), capilaridad, mecánica, óptica, electricidad, etc. (esta breve lista sólo marca ciertas inclinaciones personales).

Para dar una idea más exacta de lo que puede generarse, es preciso decir que *todo problema que pueda ser geometrizable encuentra una representación* del mismo dentro de este entorno, siendo esta una razón, entre muchas, de la creciente popularidad de Cabri Géomètre II.

Actividades con Cabri Géomètre II

Tanto en Francia, su País de origen, como en diversas partes del mundo, se han desarrollado clubes de utilizadores que incluyen asociaciones de profesores , estudiantes e investigadores en educación con nuevas tecnologías; para darse una idea de cómo se ha extendido este interés puede visitar la siguiente pagina web:

http://www.cabri.net/sites/sites.html

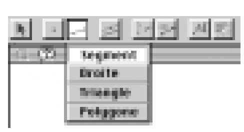
Presentaremos algunas actividades que se encuentran a disposición del público en el web. Al mismo tiempo mostraremos una actividad diseñada por uno de nosotros que estará, también, en un futuro próximo en línea.

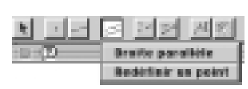
1. Una actividad de aprendizaje con los menus de Cabri Géomètre II reducidos:

   http://www.cabri.net/cabriole/Numero1/CabriEnClasse/menusReduits1.html

Una actividad con menús reducidos
Cabri Géomètre II da la posibilidad de limitar los menús puestos a disposición de los estudiantes. Los conocimientos que ponen en práctica los estudiantes dependen de la situación que les es proporcionada y de los menús que tienen a su alcance.

He aquí un ejemplo que usted puede estudiar para sus alumnos de primaria de tercero y cuarto grados. Con los menús siguientes (la única herramienta del menú de construcción es recta paralela), realizar la construcción pedida a continuación:





Ya tengo el software... y ¿ahora qué? *(continuación)*

Dado un vértice A de un triángulo ABC y los puntos medios R y S de los lados AB y AC. Construir los vértices B y C.

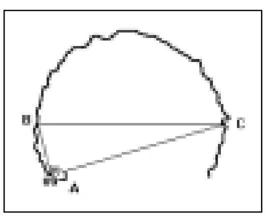
Solo la utilización de propiedades matemáticas, aquí por ejemplo la propiedad de los puntos medios en un triángulo, permite realizar la construcción (diseño de Bernard Capponi)

2. Una actividad pedagógica para reconocer un lugar geométrico:
   http://www.cabri.net/cabriole/Numero4/CabriEnClasse/pedago4.html

Una utilización pedagógica original del lugar de puntos (lugar geométrico). Actividad individual para alumnos de primaria de segundo grado. Damos aquí un ejemplo propuesto por J. F. Bonnet, profesor de Collège de Solliès-Pont.

A propósito de los triángulos rectángulos
Se pide trazar un triángulo ABC, medir el segmento [BC] y el ángulo A, manipular la figura para tener BC igual a 20 y el triángulo ABC rectángulo en A.

Se propone en seguida desplazar el punto A tratando de mantener el ángulo en 90° y para ver todas las posiciones posibles de tales puntos A, se propone utilizar "lugar de puntos" que nos dará la "traza" dejada por A en su desplazamiento.



Un trabajo como el que se obtiene en los cursos esta ilustrado en la figura que aparece enseguida. Observe que así, un dibujo puede dar una imagen mental kinestésica del lugar construido.

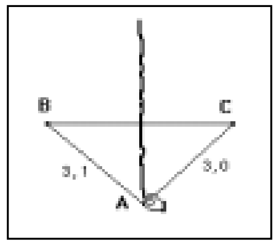
Este círculo de diámetro BC, una vez identificado, se construye después de verificar que, al desplazar A sobre el círculo (o casi sobre él) para todos los puntos A sobre el círculo, el ángulo en A es recto.

Apunte de Claviste
En los hechos, al trabajar para Cabriole, se vio que con desplazamientos manuales y muy aproximados, se oscila entre 85° y 95° rectificando frecuentemente los trazos. Se puede ver que se navega entre dos zonas: la interior del círculo, donde el ángulo es superior a 90°, y la exterior, donde es inferior a 90°.

Esta observación podría preparar el terreno para más tarde tener una idea que muestre ese rol de "frontera" de una curva, y la conexión entre "ecuación" e "inecuación". En efecto, hay la tendencia en la enseñanza de las "representaciones gráficas" a enfocarse en la curva, como si los otros puntos del plano no existieran y no tuvieran derecho a un valor de f(x,y), bajo el pretexto de que ese valor es diferente de 0.

En fin, la ocasión es bella después de este desplazamiento bisoño introductorio, que permite redescubir la "conexión" del punto A al círculo, a fin de retomar, confortablemente esta vez, el desplazamiento de A y una nueva "verificación".

A propósito de los triángulos isósceles



Se realizará una actividad semejante, con un triángulo ABC, donde se desplazará al punto A para mantener al triángulo lo más cerca de un triángulo isósceles. Se obtienen dibujos similares al mostrado en la siguiente figura y se persigue de la misma manera la conexión entre el punto A y la mediatriz.

La aplicación
¿Cómo, a partir de un segmento BC, trazar un triángulo ABC que sea rectángulo en A e isósceles con base BC?

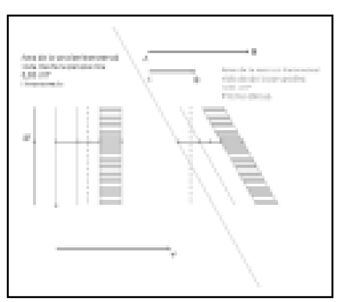
El trabajo emprendido aquí, al contrario de diversas actividades con "lápiz y papel" gemelas a las actividades en Cabri Géomètre II™, permite a los alumnos, al lado de nuevos conocimientos, redescubrir otra vez ciertas propiedades que ellos ya conocían, como aquellas de la mediatriz.

Hemos sido seducidos por este uso del "lugar de puntos " con alumnos de segundo grado, donde el lugar es presentado como "la traza de un punto" en su desplazamiento, de forma muy natural para los alumnos.

3. Una actividad de aprendizaje del Principio de Cavalieri en el plano. La actividad tiene como último propósito establecer la relación de igualdad de los volúmenes de los prismas rectos y oblicuos con base y altura iguales. Forma parte de un conjunto más extenso que trabaja propiedades tanto en el plano como el espacio. Se busca respetar el sentido sintético de la geometría que en él se aborda; en una actividad previa se ha empleado la idea de "área de corte vista desde la perspectiva" y se contrasta con la de "área de corte vista desde arriba".

Actividad: *Prismas rectos y oblicuos.* Trabajo individual

Propósito: Buscar invariantes geométricos



a) Cargue el archivo s2.fig en el entorno.

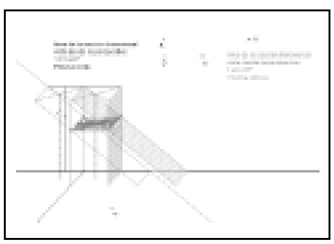
b) Reduzca el entorno a dos dimensiones. ¿Qué propiedad matemática referente a las áreas de cuadriláteros sugiere?
c) Regrese el entorno a tres dimensiones y observe los valores de las áreas medidas cuando realiza giros del eje oblicuo. Observe también el cambio de forma de los prismas.
d) Cambie la altura a la que se efectúa el corte cambiando de posición al punto z1. ¿Qué ocurre con las áreas medidas en cada caso?
e) Cambie el tamaño de la base mediante la manipulación del segmento correspondiente (¿a qué segmento nos referimos y qué cambio es el que debe realizarse?).

Indique nuevamente sobre el dibujo ejemplos de ángulos y segmentos que conservan las medidas originales y aquellos que no las conservan.

En este entorno no ha sido representada el área de corte que se observaría en la vista superior. ¿Es posible obtener propiedades matemáticas correctas?.

Búsqueda de invariantes geométricos

a) Con el entorno en tres dimensiones, manipule el prisma oblicuo por su eje hasta que sea perpendicular al eje horizontal. Ahora tome la punta del vector v hasta que ambos prismas se superpongan. ¿Qué propiedad se sugiere que cumplen los cuerpos?
b) Si ahora manipula al eje del prisma oblicuo, tan sólo coincidirán las caras inferiores. Para separar los cuerpos, se manipula la punta del vector v.
c) Cambie de posición el punto z1 y manipule el vector v para intentar hacer coincidir las secciones de corte correspondientes en el prisma recto y en el oblicuo. También cuenta con la medición de áreas de corte desde la perspectiva como método alternativo al de superposición de figuras, para comprobar la igualdad de áreas. ¿Influye la perspectiva en la superposición de los cortes?



Conclusión

Como usted pudo ver en este artículo, Cabri Géomètre II™ es un "didactigrama" muy potente y de uso fácil. Una observación importante es que el entorno puede ser modificado de acuerdo a las necesidades del usuario, como se desprende de la utilización de las macro-construcciones (en la celda correspondiente a cómo Hacer una macro-construcción, se incluye en el entorno la manera de construir un triángulo equilátero a partir del lado, comando que, por supuesto, no se incluye en el menú original). También el conjunto de actividades que se ha presentado ciertamente no se agotan las posibilidades que Cabri Géomètre II ofrece al profesor en el diseño de sus materiales de enseñanza. Seguramente ya esta ansioso de poner manos a la obra, pero una sugerencia de último momento: revise las actividades que se encuentran en las direcciones Internet a disposición de todos los "Cabri-fanáticos", son muy variadas, originales y profundas. En estos momentos usted se preguntará: todo lo que me han dicho suena bien pero ¿será realmente así?. Pues querido lector esta exposición todavía no termina: le seguimos invitando a que continúe, ahora con la lectura de **"¿Cuál es el costo por usar el software?".**

Referencias

Cortés, C., Díaz Barriga, E. *Software y quehacer matemático: Análisis de los paquetes a través de sus interfaces* (en prensa).

Cortés, C., Díaz Barriga, E. *Enseñar la demostración en Geometría vs. Enseñar la demostración en Geometría* (en prensa).

Díaz Barriga, E. *Explorando las cónicas con Cabri-Géomètre*. Revista IPN, Ciencia, Arte: Cultura. 13, pg. 47-53, 1997. **http://angrod.imag.fr/eugenio/ediaz.htm**

Díaz Barriga, E. *Problemas de Máximos y Mínimos sin Cálculo en el entorno computacional de Cabri-Géomètre*. Revista IPN, Ciencia, Arte: Cultura. 16, pg. 16-22, 1997. **http://angrod.imag.fr/eugenio/ediaz.htm**

Díaz Barriga, E. *Los complicados complejos: Explorando el plano con ayuda de Cabri-Géomètre. Séptimo Seminario nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática. Cd. Madero*, Tamps. 1996. **http://angrod.imag.fr/eugenio/ediaz.htm**

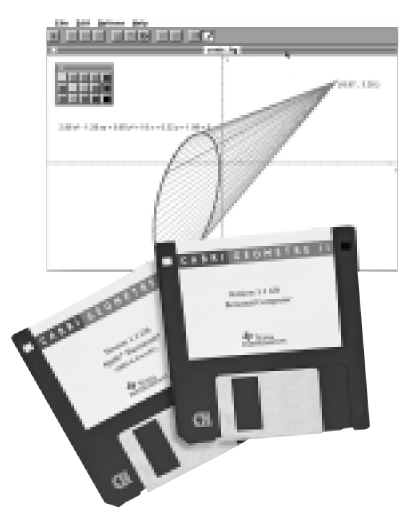
Díaz Barriga, E. *Cabri-Geòmétre: explorando más allá de la regla y el compás, en Memorias de la VI Jornada sobre la enseñanza de la Geometría. Acuña, Díaz Barriga, Zubieta y Recio editores*. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México, 1996.

Laborde, C., Keyton, M., Hölzl, R., Kobayashi, I. et al. *Geometry for the World*. Texas Instruments. USA, 1996.

Rousselet, M. *Dessiner l´espace ou Comment employer Cabri-Géomètre en géométrie dans l´espace*. Editions Archimede. France, 1996.

IUFM de Grenoble, IREM de Grenoble, LSD2 (IMAG) Université Joseph Fourier. Université d´été. *Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur: Utilisation du logiciel Cabri-Géomètre en classe*. France, 1993.

IUFM de Grenoble, IREM de Grenoble, LSD2 (IMAG) Université Joseph Fourier. Université d´été. *Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur: Utilisation du logiciel Cabri-Géomètre en classe*. France, 1996.



Jorge M. López

Didáctica y tecnología: la enseñanza de la geometría tres siglos después de Euclides

Resumen: *Los programados de computadora para la exploración geométrica dan un nuevo aire a la enseñanza de la geometría, creando lugar para desarrollar en el aula elementos de la heurística polyiana, como lo son la formulación de conjeturas, el establecimiento de analogías, la generalización de situaciones, etc. En el artículo se presentan tres ejemplos trabajados en el Sketchpad® en la TI-92.*

Introducción

Es harto conocido por todos los educadores e investigadores de la matemática la caricatura popular que se hace de esta disciplina. En primer lugar, nuestros estudiantes nunca salen de la impresión que describe a la matemática como una disciplina en la que se estudia una colección extensa, parecería que interminable, de "rutinas", "rituales" o algoritmos que llevan a la solución de ciertos problemas. Tales problemas, dicho sea de paso, no abundan necesariamente en el mundo circundante, pero sí en los textos de matemática. Ciertamente, la experiencia en las aulas de muchos estudiantes contribuye a la formación de tal opinión. En efecto, una revisión perfunctoria de los cursos de matemática que constituyen el curriculo escolar en todos los niveles educativos, delata a la matemática como una disciplina que se ocupa del estudio de "destrezas" que llevan a la solución de ciertos problemas estereotipados, y que, a fin de cuentas, fueron resueltos por otros, no recientemente, sino más bien hace varios siglos. Nuestro currículo matemático preuniversitario consiste de temas de la matemática ya conocidos en el siglo XVII, los cuales se presentan, a veces, en un lenguaje que contiene algunas pinceladas de vientos más modernos.

No resulta extraño pues que los estudiantes perciban la matemática como una disciplina estancada, de poca vigencia y aplicabilidad a los problemas que ocupan a los ciudadanos promedio de nuestra sociedad actual. Además, esta forma de presentar el estudio matemático oculta el carácter experimental de la matemática, disciplina en la que son más los problemas que requieren solución que los que ya han sido resueltos, y en la que prevalecen como técnicas de pensamiento, la conjetura, la inducción, la generalización, la formulación de analogías, el razonamiento plausible y el razonamiento demostrativo. El estudio de la *heurística* propuesto por Polya capitaliza precisamente la reflexión sobre la contraposición y el entrejuego que existen entre tales estilos de pensamiento cuando se ocupan en la dilucidación de asuntos de carácter matemático. De acuerdo a Polya, "la matemática presentada en la forma euclídea aparece como una ciencia sistemática y deductiva; pero la matemática en estado de gestación aparece como una ciencia experimental e inductiva[1]. Esta matemática que se descubre o se crea aludida por Polya, ha dado entrada a la aplicación de los instrumentos modernos de cálculo al proceso de creación matemática. Las calculadoras y las computadoras se emplean hoy día, no sólo como instrumentos de cálculo propiamente dichos, capaces de completar eficiente y expeditamente cálculos complicados, sino también como instrumentos de descubrimiento, modelaje y exploración. La educación matemática tiene mucho que nutrirse del empleo de las calculadoras y las computadoras como instrumentos de exploración y modelaje matemáticos. En este artículo presentaré ejemplos de cómo se puede hacer uso de la calculadora para crear "ambientes de exploración" en los que el estudiante asume un rol activo en el descubrimiento matemático y la formulación de conjeturas. Mis ejemplos se circunscriben a la utilización del "Geometer's Sketchpad®" pero son fácilmente adaptables al "Cabri Geometry™". Las experiencias aquí relatadas fueron gestadas como parte de un proyecto de didáctica de la Geometría en la que participaron varios profesores de los departamentos de matemáticas de varios recintos de la Universidad de Puerto Rico[2].

La geometría dinámica

Algunas calculadoras modernas[3] vienen dotadas de programas de "geometría dinámica" tales como el "Geometer's Sketchpad" o el "Cabri Geometry". Estos programas permiten la exploración "dinámica" en escenarios artificialmente creados para la experimentación y la formulación de conjeturas geométricas. A continuación presentamos tres ejemplos de temas geométricos que cobran un interés especial a la luz de la existencia de los programas anteriormente mencionados y que proporcionan evidencia elocuente de cómo se pueden incorporar a la didáctica de la geometría los ingredientes centrales de la resolución de problemas estudiados e ilustrados[4] en la heurística de Polya.

Un problema sobre las medianas de un triángulo

Suponga que, como se muestra en la pantalla de la calculadora de la Figura 1, se tiene un círculo con centro A y que en éste último se inscribe el triángulo CDE como se muestra. Luego, dibujamos las medianas CG, DF y EH como aparece indicado en la misma figura. Es difícil que se nos escape la observación de la existencia de un punto común en las tres medianas (el punto I en la **Figura 1**). Una observación difícil de escapar es que las medianas del triángulo inscrito parecen cortarse entre ellas en un punto común I, tal y como lo predice el famoso teorema de la geometría plana.

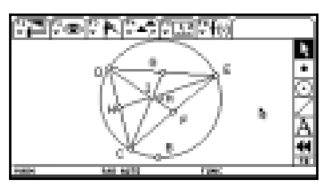


Figura 1

[1] **G. Polya**. *How to Solve It; A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 1945; la traducción es nuestra.

[2] **I. J. Dejter, R. Hernández and J. López**. *Generation of Conjectures in Plane Geometry and the Challenge of Proving Them: Loci of Centroids and More*, The Geometry Conference, Technical Report, 1993.

[3] Como la TI-92, para la cual están disponibles ambos programas.

[4] **Véase G. Polya**. *Mathematics and Plausible Reasoning, Vols. I y II*, Princeton University Press.

Didáctica y tecnología: la enseñanza de la geometría tres siglos después de Euclides *(continuación)*

La ventana que se ilustra en la **Figura 2** muestra el mismo círculo con su triángulo inscrito, pero en ella hemos ocultado las medianas; aparecen los vértices del triángulo, los puntos medios de sus lados , la intersección común de las medianas, I (llamado *baricentro o centroide*), y el centro del círculo, A. En esta misma figura el lector podrá apreciar, además, la posición del centroide relativo al centro del círculo.

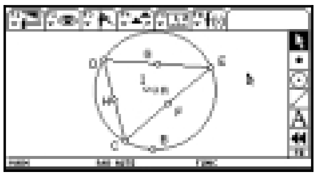


Figura 2

Desde luego, la posición del centroide cambia si cambiamos el triángulo inscrito. Cla-ramente todos los triángulos inscritos que comparten un mismo lado, digamos el lado CE, se obtienen al girar el punto D a lo largo del circuncírculo. Nos preguntamos, ¿qué le ocurre al baricentro cuando movemos el punto D a través de la circunferencia. Si empleamos los recursos de la calculadora para dar "animación" a este movimiento mientras trazamos la trayectoria del centroide, llegamos a la ventana que se presenta en la **Figura 3**. Un examen perfunctorio de la ventanilla obtenida muestra que el lugar geométrico deseado parece ser un círculo y que el mismo corta de forma "simétrica" el lado del triángulo opuesto al punto móvil (CE). Nótese que el lado CD se muestra como un segmento de "línea doble" para resaltar su inmovilidad respecto la "animación" descrita. Algunos estudiantes que han considerado este problema conjeturan correctamente que el círculo del lugar geométrico triseca el lado opuesto al punto móvil y partiendo de este dato pueden calcular el radio y localizar el centro del círculo del lugar geométrico. En efecto, el círculo del lugar geométrico es la imagen homotésica del círculo original; dejamos al lector la determinación del centro de la homotesia y el factor de contracción correspondiente.

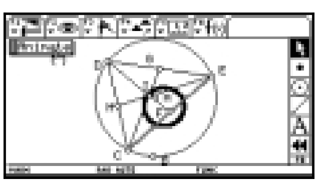


Figura 3

Problemas análogos al aquí propuesto sobre las medianas lo son los problemas correspondientes para otras dos cevianas[5] notables: las alturas y las bisectrices angulares.

El problema análogo sobre las alturas de un triángulo

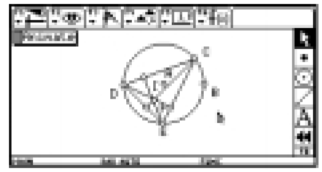


Figura 4

De nuevo, la geometría plana nos enseña que las alturas se cortan en un punto común llamado *ortocentro*. En la pantalla de la **Figura 4** vemos un triángulo inscrito en un círculo con centro A, cuyas alturas se cortan en el punto F. En la **Figura 5** se han ocultado las alturas, pero no así el ortocentro F. A diferencia del caso de las medianas, en el caso de las alturas podría ocurrir que el ortocentro quede fuera del triángulo (si el triángulo es obtusángulo, como el que se muestra en la **Figura 5**).

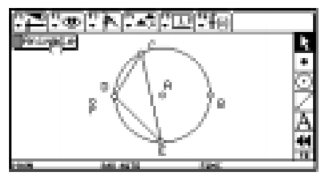


Figura 5

Nos preguntamos por el lugar geométrico del ortocentro a medida que uno de los puntos del triángulo se mueve alrededor del círculo (digamos, para concretar, el punto C). La **Figura 6** muestra el lugar geométrico observado.

Ciertamente el lugar geométrico parece ser un círculo congruente al círculo original. ¿Cuál es su centro? ¿Cuál es la conjetura correspondiente? Instamos al lector a proveer las contestaciones a estas preguntas.

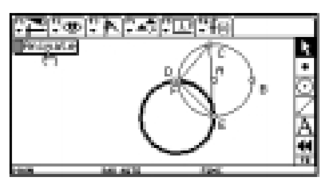


Figura 6

Figura 7

[5] Una ceviana de un triángulo es un segmento que une un vértice del mismo con un punto interior del lado opuesto al vértice.

Didáctica y tecnología: la enseñanza de la geometría tres siglos después de Euclides *(continuación)*

Finalmente nos ocupamos de las bisectrices angulares. Éstas son cevianas cuya intersección común se conoce como inradio, siendo el centro del círculo inscrito en el triángulo.

En la pantalla de la **Figura 7** se aprecia un círculo de centro E y el incentro D (las bisectrices angulares se han ocultado).

En la ventana de la **Figura 8** se aprecia el lugar geométrico del punto D a medida que C se mueve a lo largo del círculo en el que está inscrito el triángulo ABC.

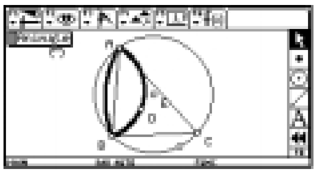


Figura 8

Si en lugar de tomar las bisectrices angulares internas combinamos dos bisectrices externas y una interna, se obtienen resultados muy interesantes. En la pantalla de la **Figura 9** se observa el punto G, el cual es, en este caso, la intersección de la bisectriz del ángulo externo formado por la prolongación de EC en el extremo C y la bisectriz del ángulo E (la bisectriz del ángulo externo formado por la prolongación de ED en D y el lado DC también, se demuestra, pasa por G). Decimos que el punto G es un *excentro* del triángulo ECD.

Ciertamente parecería que la **Figuras 8** y **10** muestran porciones distintas de dos "ciertas" circunferencias que se intersecan. También parecería que la "frontera" que determina lo que se puede apreciar de las circunferencias del lugar geométrico en la **Figura 10** es la recta perpendicular al segmento ED en su extremo D. Parece pues que hay una cierta conjetura en "el aire".

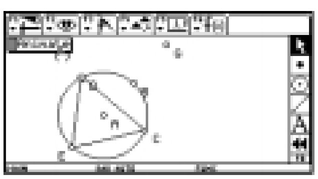


Figura 9

Todos estos ejemplos muestran cómo los estudiantes pueden emplear la calculadora como un instrumento heurístico para el descubrimiento de relaciones geométricas de carácter "dinámico" como las descritas. No se debe menospreciar la posibilidad que tienen estos programas geométricos para desarrollar los "ojos de la imaginación" y la capacidad de los estudiantes para la visualización geométrica. El autor de este escrito ha visto en la práctica cómo algunos niños de escuela primaria han sido capaces de descubrir (es decir, conjeturar) resultados geométricos post-euclideos[6], con sólo "jugar" y "explorar" en escenarios geométricos como los aquí presentados. Consideremos un ejemplo. En efecto, suponga que tenemos un cuadrilátero ABCD y que construimos el cuadrilátero que se forma al unir consecutivamente los puntos medios del cuadrilátero original. Observando la ventanas de la **Figura 11**, parecería que el cuadrilátero formado es un paralelogramo, y que ello no depende de la convexidad o falta de ella del cuadrilátero original (vea la **Figura 12**). También, las medidas indican que el área del paralelogramo es la mitad del área del cuadrilátero original. Dejamos al lector el enunciado y la prueba de la conjetura correspondiente.

[6] Es decir, que no aparecen en Los Elementos (como, por ejemplo, el teorema de Ceva, el cual se demostró en la edad media).

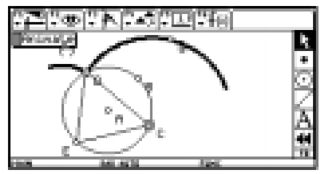


Figura 10

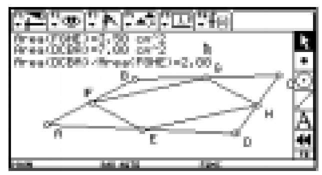


Figura 11

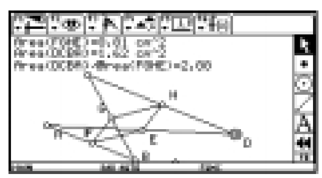


Figura 12

Epílogo

Esperamos que las muestras que hemos dado aquí de los escenarios artificiales de exploración matemática que se pueden crear con las calculadoras, hayan dado al lector una idea de lo valioso que pueden ser estos instrumentos en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. A pesar de la naturaleza variada y de rico contenido geométrico de los ejemplos, ciertamente han quedado otros en el "tintero".

Referencias

L. A. Campistrous y J. M. López. *La calculadora como una herramienta heurística*, Revista UNO (por publicarse).
L. A. Campistrous y J. M. López. *La calculadora: Rutina o pensamiento, Innovaciones Educativas: Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias*, segunda edición 2001.
I. J. Dejter, R. Hernández and J. López. *Generation of Conjectures in Plane Geometry and the Challenge of Proving Them: Loci of Centroids and More, The Geometry Conference*, Technical Report, 1993.
Euclid. *The Elements*, (Sir Thomas L. Heath, Traductor, 1908 y 1925) Dover Publications, Tres volúmenes, 1956.

Juana Contreras S.† & *Claudio del Pino O.*†

Números enteros y calendario

Introducción

El calendario, es un instrumento que ha sido creado por el hombre con el principal propósito de llevar el registro del tiempo. Nuestro calendario tiene sus bases en el calendario romano que usaba el cliclo de la luna, y que en el siglo I a.C., el emperador romano Cayo Julio César, asesorado por el astrónomo griego Sosígenes, decidió utilizar el ciclo del sol, transformándose en un calendario solar.

Un calendario solar mide en un número entero de días, el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del centro Sol por el punto vernal o equinoccio de Marzo. Este tiempo corresponde a un año trópico, cuya duración es de aproximadamente 365.2421986 días medios[1].
En las cercanías de un fin de siglo, como el reciente año 2000, nuestro calendario ha sido tema de discusión, de conversación y de análisis de diversos grupos de un espectro muy amplio.

La interesante presencia de la matemática, especialmente con temáticas de los números enteros, junto con importantes elementos históricos, datos de origen y reformas llevadas a cabo, hacen que el estudio de este instrumento se constituya en una fuente de interesantes problemas que pueden ser tratados en diversos niveles de la enseñanza de la matemática.

En este trabajo, se presenta un resumen del tema, actividades en el ambiente de números enteros, y de manera especial, funciones relacionadas con el calendario, implementadas en el software de propósitos matemáticos Derive™, las que se adjuntan en un anexo. Las funciones que posee el software, junto con las posibilidades de programación, permiten definir nuevas funciones para apoyar, como en este trabajo, actividades específicas en un tema.

Un poco de historia de nuestro calendario

El calendario romano, se componía de12 meses[2], con un promedio de 30 días cada uno (desde el siglo VII a.C.), intercalando en algunos años, de manera arbitraria, una cantidad de días con el fin de producir un ajuste con el tiempo real. Éste tenía una diferencia de aproximadamente 5 días con respecto de un año verdadero. Es así que, al paso de los años, el déficit se iba acumulando, lo que producía trastornos en la población, ya que las fechas no coincidían con las estaciones del año. Fue en el período del emperador romano Julio César, el que, asesorado por el astrónomo griego Sosígenes, implantó una reforma al calendario, que lleva su nombre.

Reforma juliana

La reforma juliana se instituyó en el año 45 a.C.[3], dando origen al calendario juliano, que establecía que el año tendría una duración de 365,25 días en promedio.

Como el año de calendario debía tener un número entero de días, esta reforma decretó lo siguiente:

- La duración de un año normal será de 365 días.
- Cada cuatro años se intercalará un día[4]. Aquellos años con un día adicional, recibirán el nombre de *años bisiestos*, cuya duración será de 366 días.
- También se reglamentó respecto de los años que serían bisiestos. Serán bisiestos aquellos años que fueren múltiplos de 4.

El calendario juliano, consideró la misma organización del año de su antecesor, el romano, en doce meses, modificando la cantidad de días de cada mes y el inicio de cada año[5], distribución que permanece hasta nuestros días.

Así, determinar si un año juliano es bisiesto, no es una tarea complicada. Basta dividir el número correspondiente al año, por 4.

El determinar *a mano* si un año juliano es bisiesto, es una muy buena opción para trabajar con los estudiantes, siendo también un buen momento para iniciar un trabajo con Derive, utilizando algunas funciones que tiene el programa en el ámbito de los números enteros, y así reforzar algunos conceptos relacionados con números enteros.

Dos de las funciones en el ambiente de números enteros que tiene Derive son:

- mod(*m,n*) que entrega el resto de dividir *m* entre *n*
- floor(*m,n*) que entrega el cuociente de dividir *m* entre *n*

Utilizando estas funciones, se ha implementado la función **numresto***(a,b,n)* que entrega una lista de dos filas, conteniendo los números enteros de *a* hasta *b*, y sus respectivos restos de dividir cada número por *n*. Por ejemplo:

$$\textbf{numresto(15, 28, 6)} = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Problema 1: *De encontrarnos regulados por el calendario juliano, ¿cuántos años bisiestos habrían ocurrido desde el año 1 de nuestra era, a nuestro año actual?, y ¿cuántos días, desde el 1 de enero del año 1 al 20 de marzo del 2001?.*

La reforma gregoriana

Con el paso de los años, el calendario juliano resultaba inexacto. En el siglo XVI, el calendario juliano presentaba una diferencia de diez días respecto del inicio de las estaciones. Este hecho, llevó al Papa Gregorio XIII, pontífice de la Iglesia Católica de esa época, nombrar una comisión para revisar el calendario, con el propósito de volver el equinoccio vernal al 21 de marzo. En esta comisión participaron, entre otros, el astrónomo Lilio y el matemático-astrónomo jesuita Clavius.

---

[1] Día medio: unidad de medida del tiempo solar medio.
[2] El año romano, desde el siglo VII a.C. comenzaba en el mes de Marzo y terminaba en el mes de Febrero.
[3] El año 45 a.C. tuvo una duración de 445 días, debido al número de días de retraso acumulado.
[4] El día adicional sería intercalado en el mes de Febrero, con una duración de 29 días.
[5] La reforma juliana decretó que cada año empezaría el día 1 del mes de enero.

† Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Chile.
e-mail: jcontres@pehuenche.utalca.cl
e-mail: cdelpino@pehuenche.utalca.cl

Números enteros y calendario

(continuación)

El día 4 de octubre del año 1582, se promulgó la llamada reforma gregoriana, en honor a su gestor, dando origen al calendario gregoriano. En primer lugar, se corrigió el retraso de diez días, descontándolos del mismo mes de octubre de ese año.

La reforma gregoriana estipuló lo siguiente:

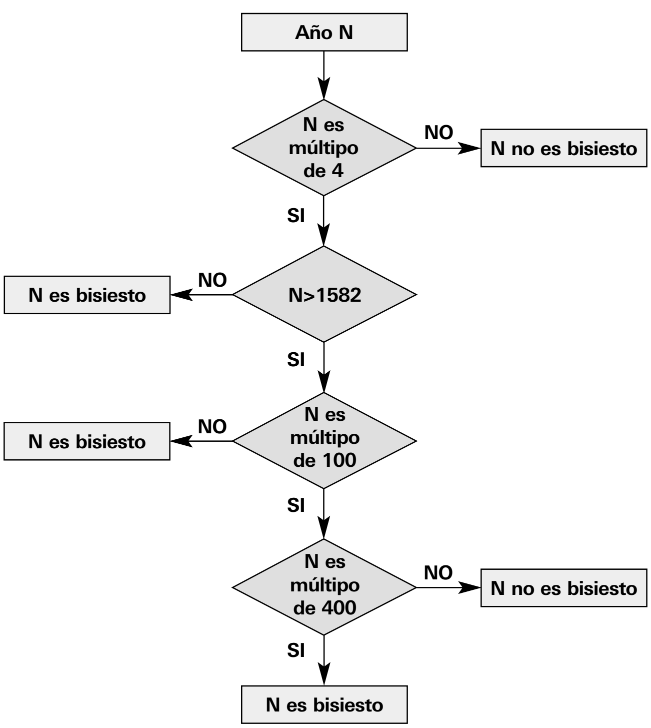
- Llamar viernes 15 de octubre al siguiente del 4 de octubre, que fue día jueves.
- Todo año tendrá una duración de 365 días, a excepción de los múltiplos de 4.
- Todo año múltiplo de 4, tendrá una duración de 366 días, a excepción de los años fines de siglo.

Los años fines de siglo, posteriores al año 1582, tendrán una duración de 366 días, siempre y cuando sea múltiplo de 400. Los otros años fines de siglo, tendrán una duración de 365 días. Al igual que en la reforma juliana, aquellos años con 366 días se denominan años bisiestos. La duración promedio de un año gregoriano es de: 365 días + 1/4 día − 3/400 día. El calendario gregoriano, a pesar de sus ventajas sobre el juliano, tardó mucho en reemplazarlo. Actualmente, el calendario gregoriano es utilizado por la totalidad de los países europeos y americanos.

Problema 2: *¿Cuántos años bisiestos han transcurrido desde el año 1583 a la fecha?*

Ambas reformas

En el siguiente diagrama se presenta la situación para un año N de nuestra era, considerando ambas reformas.



Dos funciones implementadas en Derive™, **numbis**(*n*) y **dias**(*n*), contenidas en anexo, entregan la cantidad de años bisiestos ocurridos del año 1 al año n, inclusive, y la cantidad de días ocurridos desde el día 1 de Enero del año 1, al 31 de diciembre del año n, inclusives, respectivamente.

Problema 3: *¿En qué año nos encontraríamos, si no se hubiera implantado la reforma gregoriana?*

Problema 4: *¿Cuántos días han transcurrido desde 12 de octubre de 1492?*

Determinando el día de la semana

En el calendario gregoriano, el año se encuentra distribuido en 12 meses, los meses en semanas, y cada semana consta de 7 días.

Representando por las siete letras del alfabeto de la serie: [A, B, C, D, E, F, G] a los siete días de la semana, donde A corresponde al Domingo, B al Sábado, etc., se define *Letra dominical* de un año.

Letra dominical de un año, es la letra de esta serie, que corresponde al primer domingo del año. Documentos históricos señalan que la letra dominical del año 1 de nuestra era, fue B, lo que significa que, el primer día del año 1 fue Sábado.

La determinación del día de la semana correspondiente a la fecha de un año de nuestro calendario, depende de la letra dominical de ese año. Como el mes de Febrero de un año bisiesto tiene un día adicional, a éstos años les corresponde dos letras dominicales, siendo la primera letra la que entrega información respecto del primer día del año. Conociendo la letra dominical de un año, se puede determinar el día de la semana, correspondiente a una fecha. En anexo se encuentra la función **letradom**(*n*), que entrega la letra dominical de un año n.

Problema 5: *¿A qué día de la semana, correspondió al día 1 de Enero del año de su nacimiento?. Y, ¿qué día de la semana correspondió a la fecha de su nacimiento?.*

Problema 6: *¿Cuántos años del primer milenio comenzaron un día Lunes?, ¿y, del segundo milenio?*

Otra función implementada en Derive, que se encuentra en el anexo, es la función **quediafue**(*d*,*m*,*n*), que entrega el día de semana correspondiente al día *d* del mes *m* del año *n*.

Determinando fechas

A continuación se proponen tres actividades relacionadas con determinación de fechas.

Actividad 1: *Verificar que en el año 1998 hubo tres Viernes 13. ¿Cuál será el año más próximo que tendrá tres Viernes 13?*

Actividad 2. *Seis antiguos Liceos de nuestro país, provenientes de las ciudades de: La Serena, Santiago, Rancagua, Curicó, Talca y Linares vienen realizando una Olimpiada Deportiva desde el* *año 1892 a la fecha, en la segunda semana de cada mes de Octubre, de Lunes a Viernes. Cada año, se ha realizado el evento sin interrupción, en la ciudad de procedencia de cada Liceo, en el orden mencionado.*

1. ¿Cuántos eventos se han realizado, a la fecha actual?
2. ¿En cuántas oportunidades le ha correspondido a Santiago, ser sede de las Olimpíadas?. Y, ¿en cuántas oportunidades han ocurrido en un año bisiesto?
3. ¿Entre qué fechas (inclusive), se realizó la primera Olimpíada?
4. ¿Entre qué fechas se realizó el evento número cien?
5. De continuarse este evento, bajo el mismo convenio, ¿en qué ciudad y entre qué fechas se realizaría el evento número cientocincuenta?

Actividad 3: *Cuatro integrantes de una familia, un bisabuelo (que ya no vive), un abuelo, un padre y su hijo, nacieron todos un domingo 29 de Febrero. ¿En qué años pudieron haber nacido estas cuatro personas?.*

Anexo

Función que entrega una lista con los números de a ***a*** b ***y sus respectivos restos módulo*** *n*.

numresto(a, b, n_) := VECTOR([j, MOD(j, n_)], j, a, b)

Funciones que entregan la lista de múltiplos de n ***de*** n1 ***a*** n2***, y el número de tales múltiplos***

mult(n,n1,n2):=SELECT(MOD(m,n)=0,m,VECTOR(m,m,n1,n2))
num(n,n1,n2):=DIMENSION(**mult**(n,n1,n2))

Función que entrega el número de años bisiestos entre n1 ***y*** n2***: numbis***(m)

bis_(N):=IF(MOD(N,4)=0,IF(N>1582,IF(MOD(N,100)=0, IF(MOD(N,400)=0,1,0),1),1),0)
numbis(m):=SUM(**bis**_(m),m,1,m)

Función que entrega el número de días entre el 1/1/1 al 31/12/N

dias(N):=IF(N>0 AND FLOOR(N)=N, IF(N>1581, N*365+numbis(N)-10, N*365+numbis(N)), "Ingresar un entero positivo")

Función que entrega el número total de días entre el 1/1/1 al d_/m_/N ***: totaldias***(d_,m_,N)

v_:=[31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31]
totaldias(d_,m_,N):= IF(N>1, IF(bis_(N)=0, IF(m_=1,dias(N-1)+d_-1, IF(m_=2,dias(N-1)+v_SUB 1+d_-1,dias(N-1)+SUM(v_SUB i,i,1,m_-1)+d_-1)),
IF(m_=1,dias(N-1)+d_-1,
IF(m_=2,dias(N-1)+v_ SUB 1+d_-1,dias(N-1)+SUM(v_ SUB i,i,1, m_-1)+d_))),
IF (N=1, IF(m_=1,d_-1,
IF(m_=2,v_ SUB 1+d_-1,SUM(v_ SUB i, i, 1, m_-1)+d_-1)),"Ingresar un año mayor o igual a 1"))

Letra dominical de un año juliano: letradomj (n)

ldomj(n):=SUM(IF(bis_(m)=1,2,1),m,1,n)
letras:= [0, "C"; 1, "B"; 2, "A"; 3, "G"; 4, "F"; 5, "E"; 6, "D"]
letraj(n_):= letras SUB MOD(ldomJ(n_), 7) + 1) SUB 2
aaj(n_):= letras SUB (MOD(ldomJ(n_) - 1, 7) + 1) SUB 2
letradomj(n):= IF(n>0 and n<1583, IF(bis_(n)=1, [aaj(n), letraj(n)], **letraj**(n)),"Ingrese un año juliano positivo")

Entrega la letra dominical del año gregoriano n: letradomg (n)***:***

ldomg(n):=SUM(IF(bis_(m)=1,2,1),m,1583,n)
letrag(n_):= letras SUB MOD(ldomg(n_), 7) + 1) SUB 2
aag(n_):= letras SUB (MOD(ldomg(n_) - 1, 7) + 1) SUB 2
letradomg(n):=IF(n>1582, IF(bis_(n)=1, [aag(n),letrag(n)], letrag(n)), "Ingrese un año gregoriano")

Día de la semana correspondiente al primer día de un año juliano: diaunoj (n)

dia := [0, "Viernes"; 1, "Sábado"; 2, "Domingo"; 3, "Lunes"; 4, "Martes"; 5, "Miércoles"; 6, "Jueves"]
diaunoj(n) := IF(n > 0 and n < 1583, IF(bis_(n) = 0, dia SUB MOD(ldomJ(n), 7) + 1) SUB 2, dia SUB (MOD(ldomJ(n) - 1, 7) + 1) SUB 2), "Ingresar un año juliano")

Día de la semana correspondiente a un día específico de un año juliano: quediaj (d,m,N)

diaj(d_, m_, N) :=
IF((m_ = 2 AND d_ < 30) and ((2 < m_ < 13 and m_ = 1) and d_ < 32),
IF(bis_(N) = 0,
IF(MOD(ldomj(N), 7) = 0,
IF(m_ = 1, MOD(d_ + 4, 7), MOD(SUM(v_ AND j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 4, 7)),
IF(MOD(ldomj(N), 7) = 1,
IF(m_ = 1, MOD(d_ + 5, 7), MOD(SUM(v_ AND j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 5, 7)),
IF(MOD(ldomj(N), 7) = 2, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 6, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 6, 7)),
IF(MOD(ldomj(N), 7) = 3, IF(m_ = 1, MOD(d_, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_, 7)),
IF(MOD(ldomj(N), 7) = 4,
IF(m_ = 1, MOD(d_ + 1, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 1, 7)), IF(MOD(ldomj(N), 7) = 5,
IF(m_ = 1, MOD(d_ + 2, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 2, 7)), IF(MOD(ldomj(N), 7) = 6,
IF(m_ = 1, MOD(d_ + 3, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 3, 7))))))))),
IF(MOD(ldomj(N) - 1, 7) = 0, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 4, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_ + 4, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 5, 7))),
IF(MOD(ldomj(N) - 1, 7) = 1, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 5, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_ + 5, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 6, 7))),
IF(MOD(ldomj(N) - 1, 7) = 2, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 6, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_ + 6, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_, 7))),
IF(MOD(ldomj(N) - 1, 7) = 3, IF(m_ = 1, MOD(d_, 7),

IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + (d_ + 1), 7))),
IF(MOD(ldomj(N) - 1, 7) = 4, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 1, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_ + 1, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 2, 7))),
IF(MOD(ldomj(N) - 1, 7) = 5, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 2, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_ + 2, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 3, 7))),
IF(MOD(ldomj(N) - 1, 7) = 6, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 3, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_ + 3, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 4, 7)))))))))), "Ingresar bien el mes o el número de día")

quediaj(d_, m_, n_) := IF(n_ > -45 AND n_ < 1583, IF(bis_(n_) = 0, IF(d_ < v_ SUB m_ + 1, dia SUB (MOD(diaj(d_, m_, n_) + 2, 7) + 1) SUB 2, "Revisar datos"), IF(m_ = 2, IF(d_ < 30, dia SUB (MOD(diaj(d_, m_, n_) + 2, 7) + 1) SUB 2, "Revisar datos"), IF(d_ < v_ SUB m_ + 1, dia SUB (MOD(diaj(d_, m_, n_) + 2, 7) + 1) SUB 2, "Revisar datos"))), "Revisar datos")

Día de la semana correspondiente al primer día de un año gregoriano

diaunog(N) := IF(N > 1582, IF(bis_(N) = 0, dia SUB (MOD(ldomg(N), 7) + 1) SUB 2, dia SUB (MOD(ldomg(N) - 1, 7) + 1) SUB 2), "Ingresar un año gregoriano")

Día de semana correspondiente a una fecha de un año gregoriano

diagg(d_, m_, N) :=
IF((m_ = 2 AND d_ < 30) OR ((2 < m_ < 13 OR m_ = 1) AND d_ < 32), IF(bis_(N) = 0,
IF(MOD(ldomg(N), 7) = 0,
IF(m_ = 1, MOD(d_ + 4, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 4, 7)), IF(MOD(ldomg(N), 7) = 1,
IF(m_ = 1, MOD(d_ + 5, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 5, 7)), IF(MOD(ldomg(N), 7) = 2,
IF(m_ = 1, MOD(d_ + 6, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 6, 7)), IF(MOD(ldomg(N), 7) = 3,
IF(m_ = 1, MOD(d_, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_, 7)),
IF(MOD(ldomg(N), 7) = 4, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 1, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 1, 7)),
IF(MOD(ldomg(N), 7) = 5, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 2, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 2, 7)),
IF(MOD(ldomg(N), 7) = 6,
IF(m_ = 1, MOD(d_ + 3, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 3, 7))))))))),
IF(MOD(ldomg(N) - 1, 7) = 0, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 4, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_ + 4, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 5, 7))),
IF(MOD(ldomg(N) - 1, 7) = 1, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 5, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_ + 5, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 6, 7))),
IF(MOD(ldomg(N) - 1, 7) = 2, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 6, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_ + 6, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_, 7))),
IF(MOD(ldomg(N) - 1, 7) = 3, IF(m_ = 1, MOD(d_, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + (d_ + 1), 7))),
IF(MOD(ldomg(N) - 1, 7) = 4, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 1, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_ + 1, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 2, 7))),
IF(MOD(ldomg(N) - 1, 7) = 5, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 2, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_ + 2, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 3, 7))),
IF(MOD(ldomg(N) - 1, 7) = 6, IF(m_ = 1, MOD(d_ + 3, 7),
IF(m_ = 2, MOD(v_ SUB 1 + d_ + 3, 7), MOD(SUM(v_ SUB j, j, 1, m_ - 1) + d_ + 4, 7)))))))))), "Ingresar bien el mes o el número de día")

Entrega el día de semana correspondiente a la fecha d_ ***del mes*** m_ ***del año gregoriano*** n

quediag(d_, m_, n_) := IF(n_ > 1582, IF(bis_(n_) = 0, IF(d_ < v_ SUB m_ + 1, dia SUB (MOD(diagg(d_, m_, n_) + 2, 7) + 1) SUB 2, "Revisar datos"), IF(m_ = 2, IF(d_ < 30, dia SUB (MOD(diagg(d_, m_, n_) + 2, 7) + 1) SUB 2, "Revisar datos"), IF(d_ < v_ SUB m_ + 1, dia SUB (MOD(diagg(d_, m_, n_) + 2, 7) + 1) SUB 2, "Revisar datos"))), "Revisar datos")

Letra dominical de un año juliano o gregoriano

letradom(N):=IF(N>1582, letradomg(N), IF(N>0 , letradomj(N),"Ingrese un número positivo"), "Ingrese un entero positivo")

Función que entrega el día de la semana de una fecha de un año juliano o gregoriano

quediafue(d_,m_,N):= IF(N > 1582, quediag(d_, m_, N), IF(N > -45 and N < 1582, quediaj(d_, m_, N),
IF(m_ < 10 and (m_ = 10 and d_ < 5), quediaj(d_, m_, N), IF(m_ = 10 and (d_ > 4 and d_ < 15),
"DIA ELIMINADO", quediag(d_, m_, N)))), "Ingrese un año juliano o gregoriano")

Referencias

Bilgot, J., Moncorgé, D., Noailles, J., Noirfallise, R. *Aritmética*. CRDP d´Auvergné. Université Blaise Pascal. 1998.

Doggett, L.E. *Calendars*. Extraído de Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac. Dirección Internet: **http://astro.nmsu.edu/~lhuber/leaphist.html**

Meyer, P. *The Julian and Gregorian Calendars*. Dirección Internet: **http://serendipity.magnet.ch/hermetic/cal_stud/cal_art.htm**

Uspensky, J. and Heaslet, M. *Elementary number theory and its history*. McGraw Hill. New York, 1939.

Nota: Visite la siguiente página de Texas Instruments, para bajar este programa:

http://www.ti.com/calc/latinoamerica/actividades.htm

MSc. Anabelle Castro Castro & Dipl. Adriana Rojas Chavarría

Proyecto de Investigación de Enseñanza de la Matemática en Costa Rica

Título del Projecto:

INNOVACIONES TECNOLOGICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

"Laboratorios con calculadoras Texas Instruments: TI-92 y Calculator-Based Laboratory™ (CBL™)"

Introducción

El objetivo de este artículo es presentar parte de los resultados del proyecto de investigación y extensión: "Innovaciones Tecnológicas en la Enseñanza de la Matemática que realizó durante dos años, un equipo de investigadores de las cuatro universidades estatales de Costa Rica, en búsqueda de posibles alternativas de cambio, ante un problema presente en el ámbito nacional: *un sistema de enseñanza de la matemática, con métodos tradicionales que promueven un aprendizaje memorístico y de repetición.*

Se pretende particularmente compartir algunas entrevistas hechas a estudiantes de décimo año del Colegio Científico Costarricense Sede San Carlos, para recolectar información en la investigación que realizó la MSc. Anabelle Castro de la Sede Regional del Instituto Tecnológico de Costa Rica.Todos los estudiantes entrevistados tienen entre 15 y 16 años.

La tecnología utilizada en la investigación es la calculadora TI-92 y el CBL, conjuntamente con una metodología constructivista, dando enfásis a los principios planteados por Ausubel (Aprendizaje significativo), Brunner (Aprendizaje por descubrimiento) y Vigotsky (Zona de desarrollo próximo), quienes afirman que el conocimiento no se adquiere pasivamente, sino mas bien, es construido de manera activa por el sujeto. Esta metodología se ha seguido utilizando desde1999, hasta la fecha, en las clases, por la autora.

Opinión de los estudiantes con respecto a la metodología aplicada en las clases:

"La metodología empleada tradicionalmente por otros profesores, lo limitaba mucho a uno, a hacer lo que él decía y en cambio ahora hay más libertad para preguntar, para averiguar que puede pasar en las situaciones presentadas y siempre se le aclaran las dudas. Se motiva a todos a participar, resolver los ejercicios y exponer las ideas que cada uno tiene. Uno se puede dar cuenta de los errores que cometió y los que cometen los demás para no cometerlos."

"Antes uno se sentaba a esperar que el profesor le explicara y luego llegar a la casa a resolver los ejercicios. Ahora a uno le toca enfrentarse a los ejercicios y poder aclarar dudas. El trabajo en clase es más aplicar la lógica. El trabajo en proyectos me parece una de las mejores, con plazo asignado y opciones para aclarar dudas."

"La metodología antes era muy diferente. El profesor explicaba y ponía un ejercicio y siempre todo quedaba claro. No lo ponía a trabajar a uno solo y nunca explicaba el porqué, siempre le decía: hágalo así".

"Las tareas eran sobre cosas que ya uno sabe. Aquí se preocupan más porque uno entienda, no importa que método aplique uno, sino que uno llegue al resultado. Le permiten a uno trabajar solo. Con los proyectos uno trata de resolverlos, analiza, busca caminos para resolverlos. Uno no está acostumbrado a que los ejercicios le cuesten tanto."
"Se fomenta la búsqueda de parte de los alumnos por sus propios medios. Por ejemplo: El que uno tenga que traer un resumen de lo que lee y unos ejercicios resueltos."

"Anteriormente a este curso lectivo, resolvía los ejercicios de manera rutinaria y ahora analizo. Al inicio la metodología me costó porque tenía que estar concentrado ya que de no ser así, me perdía. Antes no necesitaba poner atención, con solo copiar un ejemplo, en la casa podía hacer el resto, porque las cosas eran más simples, y si aquí uno se concentra y pone atención, lo encuentra más fácil de cuando estaba en el otro colegio.
Es muy adecuado el tener que leer uno primero y luego aplicarlos al resolver ejercicios y que el profesor le aclare las dudas, pero primero uno solo tratar de resolverlos.

El sistema de proyectos es mejor que ver a un profesor trabajando. El tipo de ejercicios es motivante porque hay que matarse tratando de encontrar la respuesta. Uno nota más avance con algo que le costó hacer y lo entendió cuando lo terminó. A veces hasta resulta interesante equivocarse con las cosas, porque aprende de eso. Los ejercicios fáciles son aburridos y da pereza hacerlos."

"Antes uno se sentaba a esperar que el profesor le explicara y luego llegar a la casa a resolver los ejercicios. Ahora a uno le toca enfrentarse a los ejercicios y poder aclarar dudas. El trabajo en clase es más aplicar la lógica. El trabajo en proyectos me parece uno de las mejores métodos, con plazo asignado y opciones para aclarar dudas."

Opinión de los estudiantes con respecto a la evaluación:

"Al inicio uno se siente muy inseguro al insistir usted en que no nos preocupemos por notas de examen o pruebas cortas, que primero pensemos en aprender. Yo no entendía a que se refería con que iba a evaluar el proceso, pues entendía pero no podía comprenderlo, pero ahora ya sé a que se refería y me da más confianza."

"Se evalúa por lo que se aplique en clase y eso no da tensión."

"No debe ser solo de exámenes, porque se amontona todo. Es mejor que se evalúe lo de siempre."

"Me siento motivado a trabajar porque uno sabe que todo es tomado en cuenta y siempre es importante trabajar en clase y así aprovecho y aprendo."

Proyecto de Investigación de Enseñanza de la Matemática en Costa Rica

(continuación)

"Me costó acostumbrarme a no pensar ¿ y el examen?. Antes estudiaba para el examen, ahora tengo que estudiar siempre sino uno no puede resolver los ejercicios y en el trabajo en grupo uno está perdido o se nota que uno no estudió, usted se da cuenta rapidito quien no estudia por las preguntas que le hacen."

Opinión de los estudiantes con respecto al uso de las calculadoras:

"El uso de tecnología le permite a uno comprobar lo realizado. En los ejercicios hechos del proyecto # 1, las calculadoras permiten darse casos. Me gustó mucho usar calculadora al hacer los ejercicios ya que también permitía saber el porqué y casi no se ha olvidado. Siento que si aprendí algo, antes no. Llegaba a matemática aburrido. Ya no es aburrido."

"Las calculadoras son bastante útiles, ya yo no sé cómo hacen otros para ver estos gráficos."

"Las calculadoras permiten despejar las dudas y sirven para verificar."

"Las calculadoras sirven porque a uno le dan más ganas de trabajar porque es importante saber que uno tiene más apoyo tecnológico."

Resultados de la Investigación

- El uso de las calculadoras permite al estudiante realizar ensayos, simulaciones, experimentos, demostraciones y reflexión. Le facilita visualizar el sentido que para él tiene ese nuevo aprendizaje al relacionarlo con sus conocimientos anteriores y algo muy importante es la oportunidad que el alumno tiene de plantear hipótesis de manera comprometida individual o en grupo (justificando su planteamiento), para concluir con la aceptación o modificación de su hipótesis, lo que provoca cambios significativos en el ambiente de aula, con clases más participativas y dinámicas.
- A los profesores se les facilita el trabajo interdisciplinario y se facilita la integración y la comprensión de los conceptos o la comprensión del papel que juega la matemática en otras disciplinas como la física, química y biología.
- El profesor requiere conocer las diferentes teorías de aprendizaje, tener muy claro cuáles son las actividades a realizar en el aula, cuáles son los conocimientos previos que debe tener el alumno, lo que además exige planeamiento con mucha anticipación de tal manera que se puedan hacer los cambios del orden de los contenidos, con respecto al orden tradicional de presentación.
- El contar con el CBL™ además de la calculadora programable es un recurso que facilita ver la transposición de algunos conceptos de la matemática con los conceptos físicos, químicos y biológicos.
- Al igual que cualquier otra tecnología, no se puede afirmar que sea la solución al problema de la enseñanza tradicional. El impacto de la incorporación depende de la metodología utilizada por el profesor y se puede con certeza decir: *"el profesor es el único responsable de generar situaciones de aprendizaje conducentes a lograr en el estudiante aprendizajes significativos"*, pero es importante destacar el potencial que esta tecnología posee para lograr la interacción del estudiante con situaciones de aprendizaje que lo conduzcan a la construcción de su conocimiento matemático.
- Como uno de los resultados generados por el potencial del equipo, al facilitar la captación de información del ambiente mediante los sensores y hacer simulaciones, se inició un nuevo proyecto de investigación que pretende determinar las metodologías que permitan la integración de ciencias y matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- El plantear a los estudiantes un cambio de evaluación, le genera mucha incertidumbre. Le es difícil entender e interiorizar que él debe trabajar en clase y extraclase porque se evalúa el proceso más que los resultados. Para ellos el no tener pruebas escritas que les diga explícitamente si pasaron o no la prueba, les hace preguntar a diario ¿y en el exámen como se va a preguntar?. Este es un aspecto que es un distractor permanente en los primeros meses. Sin embargo al finalizar el año el 87% de los estudiantes manifiesta que ha trabajado más tranquilo, al saber que se considera su trabajo y su razonamiento aún cuando algunas veces cometa errores.
- Permitió a estudiantes de X año de Colegios Científicos participar en eventos a nivel nacional e internacional con ponencias y talleres dirigidos a profesores sobre uso de tecnologías por parte de los profesores en el proceso de enseñanza aprendizaje de ellos.

Actualmente las calculadoras TI-92 se usan en diferentes cursos y universidades del país, entre los que se pueden destacar:

Colegio Científico Costarricense - Sede San Carlos
- Cálculo (Undécimo año) – MSc. Grace Damazio

Colegio Humanista de Costa Rica (Heredia)
- Enseñanza de la Geometría (Décimo año)

Instituto Tecnológico de Costa Rica - Sede Central Cartago
- Cálculo Diferencial e Integral – Lic. Jeanette Barrantes/ Lic. Manuel Alfaro/Lic. Mario Morales

Instituto Tecnológico de Costa Rica – Sede San Carlos
- Matemática General
- Cálculo Diferencial e Integral
- Investigación de Operaciones
- Álgebra – MSc. Anabelle Castro Castro/MSc. Grace Damazio A.

Los profesores que se mencionaron con anterioridad han usado las calculadoras TI-92 con el fin de minimizar la cantidad de cálculos a realizar en el momento de resolver un problema.

Presentación

MSc. Anabelle Castro Castro – Profesor Investigador de la Escuela de Ciencias y Letras
Dipl. Adriana Rojas Chavarría – Estudiante de Ing. en Computación
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Sede Regional San Carlos
Apartado Postal: 4400 - 223
Ciudad Quesada, Alajuela, Costa Rica, Centroamérica

Josef Böhm, St.Pölten, Austria

¡Dale un Giro!

Teachers Teaching with Technology™ EUROPE – 2001

Una de las preguntas más frecuentes después de las conferencias sobre el uso de tecnologías como lafamilia Texas Instruments (TI), Derive™, MS Excel y otros para la educación matemática en la secundaria es cómo plantear problemas y proponer tareas. Muchos profesores y se podría afirmar que todos, tienen una colección de problemas que son sus favoritos.

Mi respuesta es: no hay que cambiar todo; tome su propia colección de problemas y trate de darles otro punto de vista. Así, en muchos casos se le da a los problemas un giro en la direción correcta para que adopten una nueva calidad, enfocados en nuevos objetivos, con otras miradas o simplemente se leen de una manera no tan común.

No hay que esperar resultados de investigación profundos en las próximas horas ni esperar una clasificación al dar dichos giros.

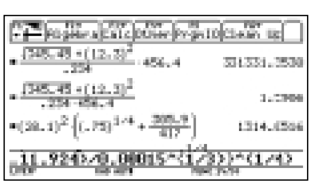
Espero dar una visión del trabajo diario de un maestro de escuela que ha estado usando Derive y la TI-92 por largo tiempo. Muchos de los ejemplos son independientes del software. Se elige la TI-92, porque está probado que es la plataforma más sencilla para presentaciones usando el TI ViewScreen™.

Cuando se inicia la utilización del PC o de la calculadora en la educación matemática se debe buscar que los alumnos se acostumbren a las máquinas tan rápido como sea posible. Se hace lo mismo que hace algunos años con las calculadoras de bolsillo: evaluar expresiones numericas complicadas y aprender a diferenciar entre los dígitos decimales y los dígitos significativos. Pero ahora los estudiantes no solo ven los resultados sino que aprenden a comparar los problemas que se dan con lo que muestra la pantalla.

$$\frac{\sqrt{345{,}45}+12{,}3^2}{0{,}234\,.\,456{,}4}= \qquad \text{(4 dígitos significativos)}$$

$$28{,}1^2\cdot\left(\sqrt[4]{0{,}75}+\frac{305{,}9}{417}\right)= \qquad \text{(1dígito decimal)}$$

$$\sqrt[4]{\frac{0{,}9842^3+5{,}32\cdot 11{,}924}{\sqrt[3]{0{,}00015}}}= \qquad \text{(2 dígitos significativos)}$$



Los estudiantes no solo observan la respuesta sino que se acostumbran a la construcción de fracciones, potencias, raíces. Luego se trabaja con las manipulaciones algebráicas básicas como el trabajo con fracciones, binomios y polinomios, resolver ecuaciones lineales, etc. No se les pide a los estudiantes que evalúen un monstruo de fracción como la que sigue (a mano), pero deben ser capaces de construir (editar) la expresión aplicando varias técnicas o estrategias.

$$\frac{\dfrac{x^2+y^2}{x-y}+y}{\dfrac{x^2}{x-y}} : \frac{\dfrac{x^2-xy+y^2}{y}}{\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}}$$

Uno puede tratar de hacerlo en un paso o la mejor elección puede ser descomponer la expresión en módulos para luego ensamblar y obtener el resultado.

Se dan algunos elementos de la potencia de un binomio. Completar:

$x^4 - 16x^3 + 96x^2 -$ ....

$a^6b^3 + 6a^4b^5$ .... = (.....................)^3

.... $- 180x^3z$ .... = (.....................)^2 ¡dar más de una solución!!

$729x^{12} - 5832x^{10}y + 19440x^8y^2$ .... =

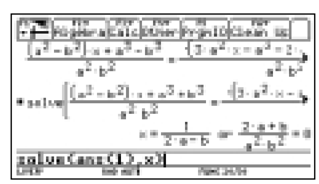
Se pueden verificar las conjeturas, factorizar números grandes.
Se puede ver que hay problemas que no tienen una solución única.
Se pueden agregar problemas que no tienen solución. Muchos estudiantes y profesores quieren encontrar "la" solución. Debemos aceptar que también la modelación de problemas matemáticos de la vida real no tienen "la" solución en cada caso.

Pasando a las ecuaciones lineales. Combinar los cálculos manuales con la respuesta a nuevas preguntas.

$$\frac{b-x}{a^2}+\frac{a+x}{b^2}=\frac{b}{a^2}-\frac{3x-a}{b^2}+\frac{b+2a}{a^2b^2}$$

a) Entrar la ecuación y explicar la simplificación que da la TI-92.
b) ¿Cuál es la solución general y cuáles condiciones se necesitan para su validez?
c) Encontrar dos soluciones especiales!
d) ¿Cuál es el resultado de la TI-92?
e) Explicar el resultado de la segunda parte eligiendo un ejemplo.
f) Explicar de donde sale la segunda parte?

Muchas preguntas resultan al observar las respuestas de una calculadora como la TI-92.



En el siguiente ejemplo también se ve cómo combinar los elementos fundamentales del álgebra y sus cálculos.

$$\frac{6}{x^3 + 4x^2 - 9x - 36} - \frac{2}{2x^3 + 19x^2 + 59x + 60} = \frac{9}{2x^3 + 5x^2 - 18x - 45}$$

a) Se puede usar la TI-92 para factorizar los denominadores, luego.
b) Encontrar el dominio.
c) Resolver la ecuación a mano.

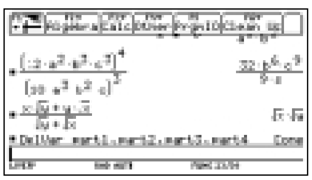
Uno de los mayores problemas no es aprender, sino aplicar lar reglas de la potenciación.

No hay problema en el uso de tecnología para entrenar los fundamentos.

Veamos un ejemplo en donde se diferencía entre los fundamentos y la resolución de problemas.

A2) Evaluar con calculadora y dar las razones del resultado. $\frac{(12a^2\,b^3\,c^3)^4}{(18a^3\,b^2\,c)^3}$

A3) $\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$ = Explicar el resultado de la calculadora.



Algunas veces el resultado de la calculadora se ve muy extraño así que no es necesario prohibir su uso:

Tomar el resultado y escribirlo sin denominador:

$$\left(\frac{a^2 b^x}{c^n}\right)^3 \left(\frac{c^{n+1}}{a^{x-1}\, b}\right)^{-2} =$$

No es necesario presentar un modelo de crecimiento o decaimiento, el solo trabajo con logaritmos es suficientemente interesante:

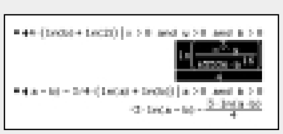
Usar la TI-92: **Expand(ln(9000)) =**
Explicar el resultado!

Aplicar las reglas apropiadas de logaritmos para desarrollar ln $(b-4)^5$.
a) ¿Cuál es el resultado que espera?
b) ¿Como puede mejorar su resultado usando su TI-92?

Agrupar los logaritmos a mano, tratar de hacer lo mejor con la TI-92 y comparar los resultados, explicar la diferencia de los resultados.

$$\frac{1}{4}(3\log x + \log y) - 4(\log b + \log 2) =$$

$$-3\log(a - b) - \frac{3}{4}(\log a + \log b) =$$



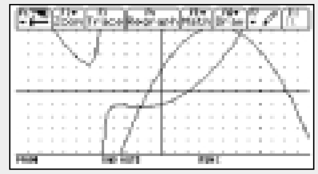
Los estudiantes deben mejorar los métodos gráficos y los numéricos y hacer de estos dos métodos compañeros de los métodos analíticos y con iguales derechos a ser utilizados.

Resolver la desigualdad gráficamente: g(x) < f(x) en N.

Para su información:

$$f(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{3x}{2} + 2$$

$$g(x) = \frac{x}{5x + 25} + \frac{x^2}{10} + \frac{x}{4} - 1$$



En una prueba de ecuaciones simultáneas se espera que los estudiantes apliquen un método de los conocidos para resolver el sistema o calcular el determinante del sistema después de tener las variables en el orden correcto.

Resolver las ecuaciones simultaneas para x y y:

$ax + by = a + 2y - 3x$
$2ax - 3by = b - 3y + 2x$

Encontrar al menos dos pares (a,b), que hacen que el sistema no sea soluble!

Un estudiante puso las variables en el orden correcto e inmediatamente notó (-3,2) y (1,1) como respuestas para la segunda pregunta. ¿Cómo obtuvo la respuesta?

Dijo $(a + 3)x + (b - 2)y = a$
$(2a - 2)x + (3 - 3b)y = b$

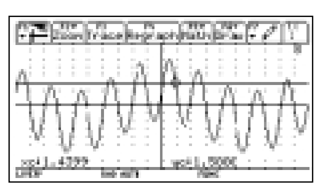
De la primera ecuación: para $a = -3$ y $b = 2$ se tiene $0 = -3$, que es falso y uno tiene otra falsedad de la segunda ecuación para $a = 1$ y $b = 1$se tiene $0 = 1$.

Las ecuaciones trigonométricas algunas veces necesitan de trucos en las manipulaciones. Porqué no resolverlas gráficamente (o numéricamente usando tablas):

Usando la TI se pueden resolver ecuaciones de esta clase y de varias maneras. Encontrar al menos 4 soluciones de

$$2\,\text{sen}\,2x + \cos\frac{x}{3} = \frac{3}{2}$$

Explicar su modo de solución y de comentarios sobre las soluciones. Trabajar en radianes pero dar al menos una solución en grados. ¿Cuántas soluciones hay? ¿Puede expresar una solución general en términos matemáticos? (¿o en palabras?)



¡Dale un Giro!

(continuación)

El trabajo con funciones polinómicas es usual en la secundaria. Tratar una aproximación gráfica:

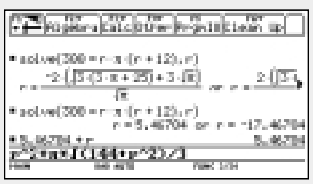
> Graficar $y(x) = 0.02x^3 - 0.13x^2 - 0.89x + 3.2$
> a) Trasladar la gráfica de modo que toque el eje x en un solo punto. Dar la ecuación de la nueva función.
> b) Trasladar la gráfica de modo que pase por el origen. Dar la ecuación de la nueva función.

Otro ejemplo:

> Encontrar una función polinomial de 4º grado con
> a) Un cero doble en $x = -3$
> b) Un cero doble en $x = 4.5$
> c) Un cero doble en $x1 = -2$ *y otro en* $x_2 = 2$.
>
> Graficarlas. ¿Puede dar alguna conjetura? Usar polinomios de otro grado para confirmar la conjetura.

Para la evaluación de los alumnos el profesor tiene que innovar. Por ejemplo, cuando el estudiante tiene que aprender las fórmulas para el área, volumen de sólidos se pueden proponer problemas como el siguiente:

> En la pantalla de la TI de un compañero se ve:
> a) ¿Cuál era el problema?
> b) Encuentre la solución para su compañero.



Realmente de cada problema el profesor tiene nuevas experiencias, por ejemplo un estudiante (posiblemente el que más mal estaba en este tema) fué el primero en dar la solución "correcta". Correcta entre comillas porque durante la prueba alguien levantó la mano y dijo que pensaba que había algo mal, que estaba seguro que el problema trata del área del cono, pero que la raíz debe ser la expresión para la altura del cono dada la generatríz y el radio. La aplicación del teorema de Pitágoras parece estar mal.
La verdad es que en el planteamiento del problema al escribirlo se fué un error. Tres de 18 estudiantes encontraron el error... son créditos extras para los estudiantes.

Esta misma idea ha sido utilizada por otros colegas, por ejemplo en un problema de matemáticas financieras se ve así.

La tarea parece estar clara:
¡Contar la historia de esta tarea!

¡De regreso a la geometría!
Los alumnos prepararon sus fórmulas en la TI-92 y se les permitía utilizarlas. Es muy interesante comparar la variedad de métodos que aparecen en la solución de un problema, muy fácil como el siguiente.

> Cinco esferas (R = 3.17 pulgadas) metálicas se funden y se construye un cilindro con r = 6.34 pulgadas. ¿Cuál es la longitud del cilindro?

Hay soluciones que las hacen completamente a mano, usando la TI-92 solamente como una calculadora de las antiguas. Otros usan las fórmulas utilizando el operador | para la substitución de variables. Y afortunadamente hay algunos que usaron el concepto de función que yo esperaba ellos adquirieran:

resolver(5*esfera_v(3.17)=cilindro_v(6.34,l),l)

La cuestión es que no solo utilizaron la calculadora como herramienta como los otros sino que dieron al problema una nueva cualidad al traducir el texto en una ecuación usando las funciones, ¡con más de una variable! Este punto se puede aclarar con otros ejemplos más adelante.

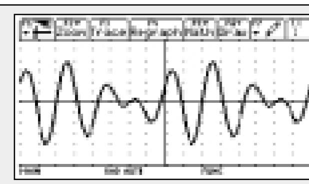
En el trabajo con funciones trigonométricas de la manera tradicional (por ejemplo con problemas de medición de terrenos) se da una nueva cualidad muy parecida a la geometría, cuando se preparan funciones para resolver triángulos, en este caso se prepararon las cuatro funciones (son la solución de problema lado, lado, lado; lado, ángulo, lado;...):

lll(l1,l2,l3), lal(l1,a3,l2), ala(a1,l3,a2), lla(l1,l2,a1)

> Cinco puntos ABCDE forman un pentágono:
> AB = 264, BD = 996, AD = 1128, DC = 444,
> ∠DEA = 122,48°, ∠DCB = 73,25°, ∠EAD = 33,10°
> ¿Cuál es la longitud del segmento EC? ¿Cuál es el área del pentagono?

El estudiante tiene que aplicar las funciones correctas y de los resultados parciales que va encontrando debe decidir cuáles son importantes. Se liberan de cálculos aburridores y de resolver ecuaciones que resultan de las reglas de seno y coseno, pero tienen que explicar cuidadosamente cómo alcanzaron los resultados.

> La función de la gráfica tiene la forma:
> $y(x) = \text{sen}\,(a\,x) + \cos\,(b\,x)$
> *con* $0 < \{a,b\} < 4$.
> a) Leer la amplitud máxima y el período. (**xscl** = $\pi/2$ y **yscl** = 0.5)
> b) Tratar de encontrar los parámetros *a* y *b*.



¡Dale un Giro!

(continuación)

Ahora pasando al cálculo:

Se dan cuatro sucesiones. Obsérvelas y decida si son monótonas o nó. Dé razones para su respuesta y utilice **al menos dos maneras** para ilustrar sus ideas.

Dé la demostración para una sucesión monótona.

(Puede estar seguro que al menos una de las sucesiones dadas es monótona).

$$a_n = \frac{6n + 2}{27 - 4n}$$

$$a_n = \frac{6 + 5n^2}{1 - 3n^2}$$

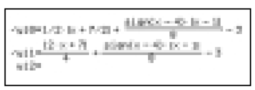
$$a_n = \sqrt{5n}\,(10 - \sqrt{3n})$$

$$a_n = \frac{6}{3\sqrt{n} + 5}$$

Obviamente esto se puede extender para estudiar límites.

Las calculadoras alfanuméricas y gráficas y los programas como el Derive™ abrieron un amplio campo para "investigar" las funciones no solo de la manera tradicional (ceros, máximos y mínimos, puntos de inflexión ....)

$$y\,(x) = \frac{|2x + 7|}{4} + \frac{\text{sign}(x - 4)|x - 1|}{8} - 3$$



a) Graficar
b) Estudiar los tipos de discontinuidades.
c) ¿Hay otros lugares "interesantes"?
d) Definir $y(x)$ como una función a trozos y superponer los gráficos para comprobar su respuesta.

Las mejores experiencias se tienen posiblemente en la "descripción de dibujos" que son gráficas de algunas funciones exóticas y extrañas. Los estudiantes aprecian este trabajo. Por ejemplo, se puede tomar una tabla de 60 funciones y que cada estudiante tenga 5 de las funciones elegidas al azar para que las describa incluyendo la gráfica y un resumen de los puntos especiales, sus discontinuidades, etc. En muchos casos no solo basta con copiar la gráfica de la pantalla, porque muchas veces los polos y saltos no aparecen como polos y saltos. La resolución de la pantalla produce errores en la conexión de puntos así que es necesario estudiar con más detalle los límites. La escala tiene que ajustarse, etc..

Parte de una tabla de funciones exóticas:

13. $y = \dfrac{x^2 - 1}{|x + 1|}$

14. $y = x - 1 + \dfrac{x + 1}{|x + 1|}$

15. $y = x - 1 + \dfrac{x^2 - 1}{[x + 1]}$

16. $y = |3x - x^2|$

17. $y = \dfrac{x - |x|}{2} + \dfrac{7}{2}\,\text{sign}\,(x + 2)$

32. $y = \text{sign}\,(4 - x^2)$

33. $y = x + \left|\dfrac{x^2}{2} - 2\right|$

34. $y = x\,|x| - 2(x + |x|) + 2$

35. $y = |x - 3| \cdot |x + 1|$

36. $y = \dfrac{x}{2}(2 + |x - 2|)$

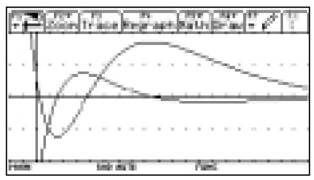
37. $y = \dfrac{|2x| - 1}{|x - 1|}$

38. $y = \dfrac{x}{2}\left(2 + \left|\dfrac{x}{2} - 2\right|\right) - \dfrac{3}{2}$

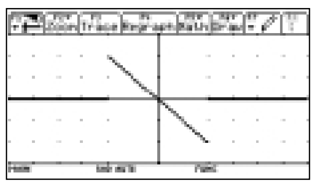
Así se evita la aplicación de reglas sofisticadas para hallar límites y en cambio se implementan funciones para mostrar las diferentes clases de discontinuidades.

$$y\,(x) = \frac{3x^2}{|x^2 - 3|}\,\text{sign}(3x - 8)$$

a. Usar la calculadora para estudiar las discontinuidades.
b. Hallar los límites para x tendiendo a $\pm\infty$. Explicar el significado de los resultados de la gráfica.
c. Graficar.



Decidir ¿Cuál de de las gráficas es la función y cuál la derivada? De razones para su decisión.



Se muestra la gráfica de la función $y(x)$. Agregar la gráfica de su antiderivada continua, pasando por el punto (-3,-2).

Así se tiene el amplio campo del "estudio de curvas". Es muy posible que en un semestre no se tenga tiempo suficiente para cubrir las aplicaciones del cálculo. Se puede introducir cuidadosamente el concepto de derivada y tratar de dar el tema pero en un examen:

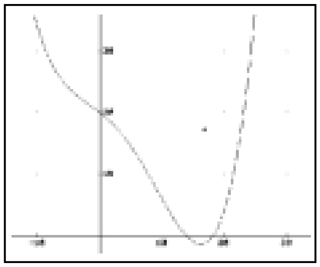
Una – antes de la TI-92 – aplicación importante del cálculo era el "Estudio de Curvas". El estudiante tenía que calcular (resolviendo ecuaciones)

- Los ceros
- Los puntos críticos (puntos de máximo y mínimo, es decir puntos con tangentes horizontales).
- Los "puntos de inflexión" (puntos con curvatura = 0; curvatura = tasa de cambio instantánea del cambio de pendiente)

a) Usar esas "recetas" para obtener los puntos especiales explicados arriba para

$$y(x) = \frac{x^4 - 8x^2 - 16}{25}$$

b) Reconoce alguna característica especial de la gráfica?
c) Dar una explicación para su forma.
d) Graficar y marcar los puntos especiales.



Otra manera es: encontrar el polinómio de 4º grado, sabiendo que se tiene un punto de inflexión en...... Todos sabemos que estos problemas, conducen a sistemas de ecuaciones lineales.

Es preferible presentar una gráfica y dar como tarea el encontrar una función que la aproxime. Los estudiantes así tienen que elegir los datos importantes, leer los números y comparar sus resultados con la gráfica dada. Los cálculos no son el problema.

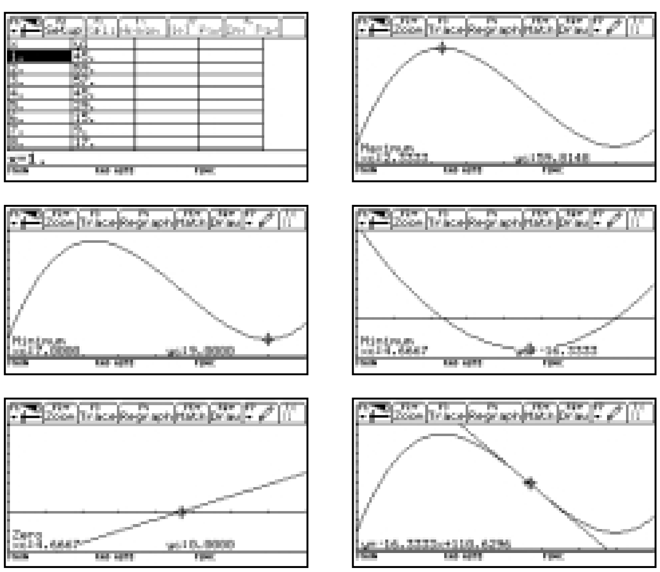
***Incluso sería mejor presentar un bosquejo a mano. Son posibles muchas variaciones:** Tener diferentes escalas en los ejes x- y, usar solamente dos o tres puntos para forzar el uso de pendientes y otros atributos. Esto permite que no se tomen las coordenadas de muchos puntos. Los estudiantes sacan bastante provecho de este tipo de problemas. Se debe tener en cuenta que se deben preparar los problemas con mucho cuidado y esto hace que la tarea del profesor se vuelva más difícil y gaste mucho más tiempo que con la forma de trabajar anteriormente.*

La función de la gráfica presentada arriba es

$$\frac{x^4 - 15x^3 - 100x^2 - 2000x + 50000}{2500}$$

Así, la tarea de plantear problemas en el contexto de la utilizacion de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas trae en verdad nuevos retos.

***Otro ejemplo:** Se da una cúbica mediante las siguientes pantallas de la TI-92. Tratar de encontar la ecuación de la cúbica de tres modos diferentes y usar al menos tres de las gráficas. (Explicar las gráficas).*



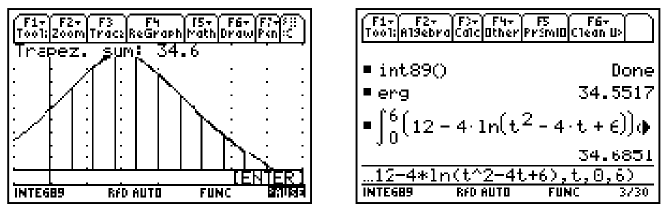
Finalmente un ejemplo de las últimas evaluaciones propuestas.

La concentración M [gramos/litro] de una medicina para la alergia, de 6-horas en el cuerpo está modelada por

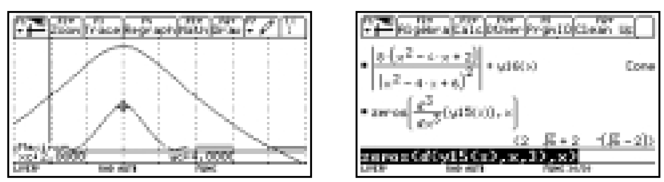
$$M(t) = 12 - 4 \ln (t^2 - 4t + 6),\ 0 \le t \le 6,$$

donde t es el tiempo en horas desde que la medicina se toma. Encontar el nivel promedio de concentración en el cuerpo en el período de 6-horas.

a) Usar la regla Trapezoidal (6 divisiones calculando a mano)
b) Usar la regla Trapezoidal (12 divisiones usando **integ()**)
c) Usar la calculadora para encontar el resultado exacto.
d) ¿Cuál es el porcentaje de error de a) y b). ¿Cuánto se mejora el resultado si se dobla el número de divisiones?
e) En varios textos se encuentra una fórmula para estimar el error E que ocurre al aplicar la regla Trapezoidal. Estimar el error para a)
$$E \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max |f''(x)|.$$
f) Encontrar el valor extremo para M(t). Encontar la importancia de este punto en conexión con la función del modelo.



*Se muestran dos pantallas de una TI-89 para demostrar, cómo los estudiantes usan **integ()**.*



*En este caso se dió un giro al uso de la tecnología para extenderlo a preguntas que sin dicha tecnología no serían posibles. Es la dificultad de integrar y quedar satisfechos con que el estudiante sea capaz de aplicar los conceptos de integración. Trabajan con un programa después de haberles mostrado lo que podrían hacer con **integ()**. Luego están forzados a emplear las capacidades gráficas y encontar la respuesta a la tarea e). También tienen que mostrar cómo trabajar con porcentajes.*

Ahora algunos consejos para dar el "giro" a sus problemas tradicionales:

- Incluir las capacidades gráficas como tarea adicional, para forzar la visualización.
- Fomentar y cuestionar las soluciones numéricas y gráficas, encontrar más de un camino para llegar a la solución, aceptar los métodos heurísticos, promover los metodos de "Ensayo y Error".
- Dejar que los alumnos construyan sus propios métodos y darles oportunidad de que los apliquen.
- Promover el pensamiento funcional.

¡Dale un Giro!

(continuación)

- Encontrar el problema a la solución presentada.
- Dejar que los estudiantes conjeturen, pero también que hagan algunas veces las pruebas.
- Incluir varias formas de presentación de las calculadoras para interpretar los resultados y comparar con los cálculos a mano, hacer que la herramienta de simplificación de las calculadoras sea matemáticamente útil.
- Usar la calculadora o en general las herramientas computacionales para preguntas adicionales (y, ¡mantenerse dentro del curriculum!!)
- Y sobre todo tener cuidado de no dar problemas que coloquen a la calculadora en el centro del problema, se debe permanecer guiados por las matemáticas y no por el manual.

La idea era promover la exploración de los problemas y ejercicios tradicionales para darles posiblemente un gran giro o un giro pequeño, cambiándolos para encontrar nuevos retos para los estudiantes y profesores.

De nuevo el trabajo de los profesores se vuelve más difícil, pero es más satisfactorio observar cómo el uso de la tecnología – independiente del software y hardware utilizado – puede aprovecharse para alcanzar los objetivos, las competencias, las destrezas, el entendimiento y finalmente, pero no menos, mejorar la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas.

Presentación:

Josef Böhm. Wuermla, Austria.
T^3 AUSTRIA
International Derive™ & TI-92 User Group
e-mail: nojo.boehm@pgv.at

Agradezco a mi amigo Milton del Castillo Lesmes Acosta, quien – con la ocasión de mi visita a su maravilloso país, Colombia – hizo la traducción de mi artículo para sus estudiantes.
Josef Böhm

Acerca de los autores:

Enigma Cúbico

Dr. Maxine Lifshitz	Friends Academy, Locust Valle, NY, **E.E.U.U.**
Traducción al Español por el Dr. Juan Melín	Texas Instruments, **CHILE**

Ya tengo el software... y ¿ahora qué?

Carlos Cortés Zavala	Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo Cinvestav – IPN Conacyt Proyecto Alfa Laboratorio Leibniz Université Joseph Fourier, **MEXICO**
Eugenio Díaz Barriga Arceo	Cinvestav – IPN Conacyt Proyecto Alfa Laboratorio Leibniz Université Joseph Fourier, **MEXICO**

Didáctica y tecnología: la enseñanza de la geometría tres siglos después de Euclides

Jorge M. López	Departamento de Matemática y Ciencia de Cómputos Universidad de Puerto Rico, Río Piedras, **PUERTO RICO**

Números Enteros y Calendario

Juana Contreras S.	Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, **CHILE**
Claudio del Pino O.	Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, **CHILE**

Proyecto de Investigación de Enseñanza de la Matemática en Costa Rica

MSc. Anabelle Castro Castro	Profesor Investigador de la Escuela de Ciencias y Letras, Instituto Tecnológico de Costa Rica, **COSTA RICA**
Dipl. Adriana Rojas Chavarría	Estudiante de Ing. En Computación, Instituto Tecnológico de Costa Rica, **COSTA RICA**

¡Dale un Giro!

Josef Böhm	Teachers Teaching with Technology™ Austria – 2001, **AUSTRIA** International Derive & TI-92 User Group
Traducción al Español por Milton del Castillo Lesmes Acosta	Universidad Distrital, **COLOMBIA**

Representantes Educacionales de Texas Instruments

MEXICO
Erica Zapata
TI MEXICO TRADE, S.A. de C.V.
Montecito No. 38
World Trade Center
Piso 34, Oficina 17, Col. Nápoles
México, D.F. C.P. 03810
Email: ezapata@ti.com
Tel: (52-55) 5488-2244 Ext. 113
Fax: (52-55) 5488-2234

PUERTO RICO
Salvador Martínez
5275 Ridgeline Drive
Unit B
Brownsville
Texas 78526
E.E.U.U.
Email: smartinez@ti.com
Tel: (956) 554-9236
Fax: (956) 554-9237

CHILE, ARGENTINA y URUGUAY
Juan Melín
Malaga 115
Oficina 904
Santiago
Chile
Email: jmelin@ti.com
Tel: (56-2) 321-3118
Fax: (56-2) 321-3119

COLOMBIA
Martha A. Gonzáles
Texas Instruments Incorporated E&PS
7800 Banner Drive, Mail Stop 3920
Dallas
Texas 75251
E.E.U.U.
Email: mgonzales@ti.com
Tel: (972) 917-3106
Fax: (972) 917-4296

BRASIL
Juan Melín
Malaga 115, Oficina 904
Santiago
Chile
Email: jmelin@ti.com
Tel: (56-2) 321-3118
Fax: (56-2) 321-3119

OTROS PAÍSES
Martha A. Gonzáles
Texas Instruments Incorporated E&PS
7800 Banner Drive, Mail Stop 3920
Dallas
Texas 75251
E.E.U.U.
Email: mgonzales@ti.com
Tel: (972) 917-3106
Fax: (972) 917-4296

Estimado Educador:

¿Le gustaría compartir sus experiencias del uso de la tecnología educacional de Texas Instruments en el aula? Usted puede colaborar con esta revista. Comuníquese con el representante de Texas Instruments en su país o envíe un mensaje a **mgonzales@ti.com.**

El comité editorial seleccionará los trabajos recibidos que serán publicados en ésta revista y/o en el área de recursos educativos de nuestra página en el Internet.

Nota: Estos trabajos se ponen a la disposición de la docencia sin costo alguno.

ConnectingMinds™

CL2002NLM3/LAR/E