



Contenido

SECCIÓN EDITORIAL:

¿Cómo funciona el sensor de movimiento,
Calculator-Based Ranger™? Pág. 2

La calculadora: Rutina o pensamiento Pág. 3
*Autores: Luis Augusto Campistrous Pérez &
Jorge M. López Fernández*

Introducción a la Geometría de la Esfera de Riemann
con Cabri Géomètre II™ Pág. 10
*Autores: María Dolores Hernández Torres,
Gabriela Esmeralda Orozco Durán,
Eugenio Díaz Barriga Arceo*

Aplicaciones al álgebra lineal utilizando Derive™ Pág. 13
Autor: Iván Castro Chadid

Enseñar la demostración en Geometría vs Enseñar
la demostración en Geometría Pág. 15
*Autores: Carlos Cortés Zavala &
Eugenio Díaz Barriga Arceo*

Los representantes de Texas Instruments en su País Pág. 20

¿Cómo Funciona el sensor de movimiento, Calculator-Based Ranger™?

¿Alguna vez usted o alguno de sus estudiantes ha caminado frente a un TI Calculator-Based Ranger (CBR™)? ¿Alguna vez usted o alguno de sus estudiantes se ha preguntado: "¿Cómo detecta a qué distancia estoy?"

El CBR funciona de forma similar a la manera como un murciélago o un delfín buscan su comida. Murciélagos y delfines envían ondas sonoras que llegan y rebotan en su presa y regresan hasta ellos. Basado en cuanto tiempo se tarda el sonido en regresar, es como ellos calculan la distancia para su próxima comida. Estas criaturas no solamente son grandes cazadores, sino también grandes científicos y matemáticos porque usan una fórmula para determinar la distancia hasta su presa:

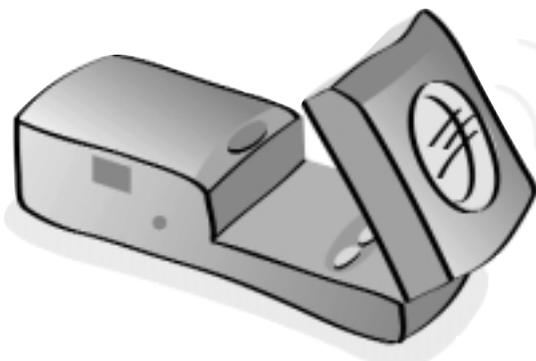
$$\text{Velocidad} = \text{Distancia} \div \text{Tiempo}$$

Que significa

$$\text{Distancia} = \text{Tiempo} \times \text{Velocidad}$$

Los murciélagos "saben" por instinto que la velocidad de su onda de sonido viaja a la velocidad del sonido. Ellos "miden" el tiempo total en que el sonido viaja hasta su presa y se regresa (después de rebotar en su presa), y después dividen ese tiempo entre dos, ya que solamente les interesa la distancia a su presa y no la distancia del viaje completo. Basándose en ésta información, "calculan" la distancia hasta su presa.

El CBR funciona de una forma muy similar. La parte brillante del sensor despide una serie de ondas sonoras que viajan a la velocidad del sonido. Cuenta el tiempo desde que despide el sonido hasta que detecta un "eco" (el sonido que se percibe al rebotar en el objeto al que se apuntó). Ahora el CBR tiene la misma información que utiliza el murciélago (la velocidad de la onda de sonido y el tiempo que la onda estuvo lejos del CBR) para calcular la distancia hasta el objeto al que apuntó.



Quizá se pregunte, "Si está enviando ondas de sonido, ¿porqué no se escuchan?" Bueno, el CBR envía ondas de sonido muy agudo, por encima del rango que percibe el oído humano – llamado "ultrasonico". Ésta es la misma razón por la que no se puede escuchar el silbato para llamar a un perro. El "ultrasonido" del CBR tiene una frecuencia de 50 KHz. El oído humano normal solamente puede oír frecuencias de hasta alrededor de 20KHz.

Sabemos que se preguntará, "¿Hasta qué distancia puede ver el CBR?". Si el objetivo está situado a más de 6 metros del CBR, el eco probablemente es demasiado débil para que el objeto sea detectado por éste. El CBR también se confunde si el objetivo está demasiado cerca. Si el objeto está situado a .5 metros de distancia, el CBR envía demasiado sonido y recibe demasiado eco que todo este ruido impide que el CBR pueda ver (u oír) una imagen clara del objeto.

Después de leer este artículo, usted puede pensar que un murciélago puede juzgar mejor la distancia que el CBR. De alguna forma, usted tiene razón, pero recuerde, sin embargo, que es mucho más fácil conectar un CBR que un murciélago a su calculadora graficadora.

La calculadora: Rutina o pensamiento

Introducción

El propósito de este artículo es el de ofrecer algunos ejemplos de problemas matemáticos del nivel de escuela secundaria (estudiantes de 15 a 18 años), cuyas soluciones y estrategias de ataque pueden descubrirse con la ayuda de la calculadora graficadora. En la escritura de este artículo hemos empleado varios tipos de calculadoras pues no queremos llevar al lector a pensar que hay un "tipo" de calculadora más apropiado que otro en la solución de los problemas que presentamos. Evidentemente, en los casos en que se requiere resolver en forma cerrada ecuaciones algebraicas, no queda más remedio que emplear calculadoras con capacidad para el cálculo simbólico, como lo son la TI-89 o la TI-92. En este artículo explotaremos algunos recursos especialmente útiles de las calculadoras de hoy, tales como la capacidad para generar tablas (es decir, de organizar datos en forma tabular) y la programación. El lector podrá apreciar cómo la calculadora es una herramienta heurística o de descubrimiento para la solución de los problemas propuestos.

Los problemas que se incluyen en este escrito los hemos obtenidos de materiales que ahora estamos intentando organizar en forma de libro y que hemos estado acumulando durante años. Por falta de espacio sólo presentamos dos problemas, uno del álgebra y otro de la "matemática recreativa". El carácter común de ambos problemas consiste en que ambos se prestan muy bien para la exploración mediante el empleo de la calculadora o la computadora. Como ya pronto veremos, en los problemas presentados, la calculadora se emplea vigorosamente para descifrar detalles sobre la naturaleza de las relaciones numéricas (o de otro tipo) que surgen del estudio de las situaciones planteadas. Ofrecemos estos problemas con el ánimo de evidenciar ante nuestros colegas maestros la utilidad de la calculadora en la enseñanza "activa" de la matemática.

Ecuaciones con sorpresas

En un cierto texto de álgebra aparece el siguiente problema¹: Resuelva la siguiente ecuación por x :

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{b}{a}$$

en la que suponemos que a y b son números reales y $a \neq 0$.

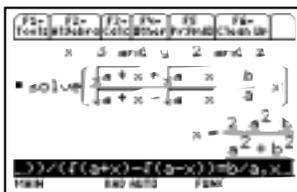


Figura 1

El texto ofrece como solución $x = 2a^2b/(a^2 + b^2)$. Si intentamos hallar la solución empleando la calculadora TI-89 también obtenemos la solución indicada, pero la pantalla ofrece un mensaje interesante: "Warning: Questionable Solution" (*Advertencia: solución cuestionable*). La **Figura 1** muestra la respuesta que se obtiene en la calculadora TI-89. Veamos algunas formas de abordar este problema. Primeramente, racionalizando el denominador, tenemos:

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \cdot \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})^2}{2x} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{2a + 2\sqrt{(a+x)(a-x)}}{2x} = \frac{b}{a}$$

$$a^2 + a\sqrt{(a+x)(a-x)} = bx$$

$$a\sqrt{(a+x)(a-x)} = bx - a^2$$

Cuadrando esta última expresión y simplificando (véase **Figura 2**), tenemos,

$$\begin{aligned} a^4 - a^2x^2 &= b^2x^2 - 2a^2bx + a^4 \\ (b^2 - a^2)x^2 - 2a^2bx &= 0 \\ x(b^2 - a^2)x - 2a^2b &= 0 \end{aligned}$$

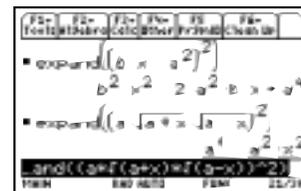


Figura 2

Igualando a cero cada factor de esta última expresión se obtienen dos soluciones, a saber $x = 0$ y la mencionada anteriormente. Note que $x = 0$ es una raíz extraña, es decir, satisface la última ecuación pero no la ecuación original.

En el texto aludido anteriormente se sugiere otro procedimiento de solución, el cual emplea el siguiente principio: si se cumple la proporción $u/v = w/z$, entonces también se cumple la proporción $(u + v) / (u - v) = (w + z) / (w - z)$ (si está bien definida, desde luego). Tomando los valores: $u = \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$, $v = \sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}$, $w = b$ y $z = a$, tenemos entonces que:

$$\frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}} = \frac{b+a}{b-a}$$

¹ R.A. Kalnin, *Álgebra y funciones elementales*, Editorial MIR, Moscú

La calculadora: Rutina o pensamiento

(continuación)

Cuadrando ambos miembros de la ecuación y resolviendo la ecuación resultante, tenemos (véase la Figura 3),

$$\frac{a+x}{a-x} = \frac{(b+a)^2}{(b-a)^2}$$

$$(a+x)(b-a)^2 = (a-x)(b+a)^2$$

$$a^2x - 2abx + b^2x + a^3 - 2a^2b + ab^2 = -a^2x - 2abx - b^2x + a^3 + 2a^2b + ab^2$$

$$2(a^2 + b^2)x - 4a^2b = 0$$

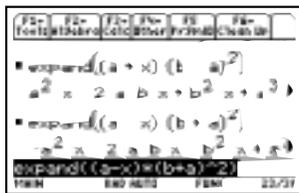


Figura 3

De esta última ecuación se obtiene la solución dada por el texto y mencionada anteriormente. Examinemos un poco esta solución.

Primeramente, en cada uno de los métodos empleados para la resolución de la ecuación hemos tenido que cuadrar ambos miembros de una ecuación, al menos una vez, y ello, como bien sabemos introduce raíces extrañas.

Además, la calculadora nos hizo una advertencia sobre la solución obtenida, catalogándola de solución dudosa y no confiable. De todos modos, al resolver ecuaciones en las que se cuadraron ambos miembros de las mismas (como ello puede conllevar la aparición de raíces extrañas) es menester verificar las soluciones obtenidas. Si intentamos verificar la solución $x = 2a^2b/(a^2 + b^2)$ sustituyéndola en el lado izquierdo de la ecuación original, obtenemos en la calculadora la siguiente pantalla:

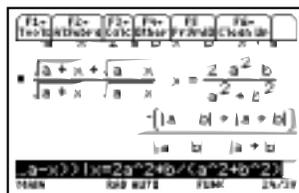


Figura 4

El resultado obtenido en nada se parece a lo que se debe obtener como solución, es decir, a b/a . Para ver lo que está ocurriendo, hagamos la sustitución de la presunta solución en la expresión $\sqrt{a+x}$ (véase Figura 5):

$$\begin{aligned} \sqrt{a+x} &= \sqrt{a + \frac{2a^2b}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a(a^2 + b^2) + 2a^2b}{a^2 + b^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a(a^2 + 2ab + b^2)}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a(a+b)^2}{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + b^2}} |a+b| \end{aligned}$$

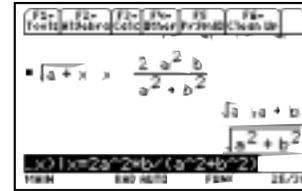


Figura 5

El procedimiento es válido siempre y cuando $a > 0$. Si continuamos haciendo las sustituciones correspondientes en las otras expresiones que aparecen en la parte izquierda de la ecuación original, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + b^2}} |a+b| + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + b^2}} |a-b| &= \frac{|a+b| + |a-b|}{|a+b| - |a-b|} \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + b^2}} |a+b| - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2 + b^2}} |a-b| & \end{aligned}$$

Esta expresión es muy reveladora pues si, por ejemplo, $a = 2$ y $b = 1$, entonces el valor de la expresión de la izquierda es $2 \neq b/a = 1/2$.

Es decir, la ecuación

$$\frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = \frac{1}{2}$$

ciertamente no tiene la solución indicada en el texto, a saber, $x = 8/5$.

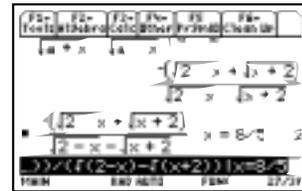


Figura 6

En efecto, al sustituir $8/5$ por x en el miembro izquierdo de la ecuación se obtiene un valor de 2 en lugar de $1/2$. Es decir, la ecuación no tiene solución en este caso, contrario a lo que se especifica en el texto. Si trazamos la gráfica de las relaciones

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} \quad (\text{cuyo dominio es } [-2, 2]), \text{ y} \\ y &= 1/2 \end{aligned}$$

observamos en la calculadora la pantalla de la izquierda en la Figura 7 (con ventana $-2 \leq x \leq 2$, $-5 \leq y \leq 5$).

La calculadora: Rutina o pensamiento

(continuación)

Claramente, las gráficas de las funciones no parecen cortarse. En el caso de las relaciones

$$y = \frac{\sqrt{1/2 + x} + \sqrt{1/2 - x}}{\sqrt{1/2 + x} - \sqrt{1/2 - x}} \text{ (cuyo dominio es } [-1/2, 1/2]), y = 2$$

(es decir, considerando los miembros de la ecuación cuando $a = 1/2$ y $b = 1$), observamos la segunda pantalla de la calculadora que se muestra a continuación (con ventana $-1/2 \leq x \leq 1/2, -5 \leq y \leq 5$).

Estas últimas relaciones sí tienen gráficas que se cortan; en efecto se cortan en el punto cuya ordenada es $x = 2/5$, la solución de la ecuación original para $a = 1/2$ y $b = 1$.

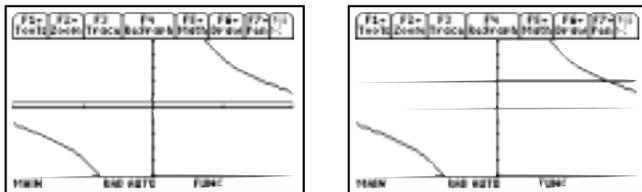


Figura 7

Tratemos de dilucidar este enigma. Como observamos anteriormente al sustituir la expresión $x = 2a^2b/(a^2 + b^2)$ en el miembro izquierdo de la ecuación original obtuvimos la expresión

$$\frac{|a + b| + |a - b|}{|a + b| - |a - b|}$$

(suponiendo, desde luego, que a es positivo). Con esta misma hipótesis sobre a , esta última expresión es equivalente a

$$\frac{1 + \frac{b}{a} + \left| 1 - \frac{b}{a} \right|}{1 + \frac{b}{a} - \left| 1 - \frac{b}{a} \right|}$$

lo cual nos sugiere que exploremos la gráfica de la relación

$$v = \frac{|1 + u| + |1 - u|}{|1 + u| - |1 - u|}$$

La gráfica de esta relación vista en la ventana $-5 \leq u \leq 5, -5 \leq v \leq 5$ aparece en la ventanilla de la izquierda en la **Figura 8** o la **Figura 9**. Esta gráfica es interesante pues parece rectilínea en parte de su dominio ($|u| \geq 1$) y tiene una apariencia radicalmente distinta para valores de u tal que $|u| < 1$. Si dibujamos en un mismo sistema de coordenadas la relación anterior y la relación $v = u$, vemos la ventanilla de la derecha en la **Figura 8**.

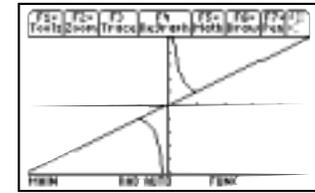
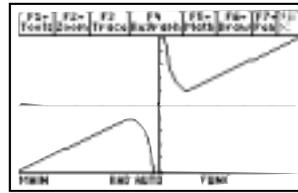


Figura 8

Además, si hacemos lo mismo (con la misma ventana) con las relaciones

$$v = \frac{|1 + u| + |1 - u|}{|1 + u| - |1 - u|}$$

$$v = 1/u,$$

obtenemos la ventanilla de la derecha de la **Figura 9**,

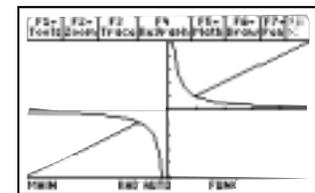
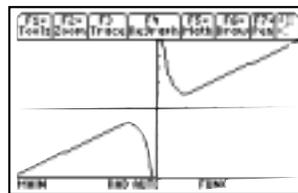


Figura 9

Claramente esto sugiere que

$$\frac{|1 + u| + |1 - u|}{|1 + u| - |1 - u|} = \begin{cases} \frac{1}{u} & \text{si } 0 < |u| < 1 \\ u & \text{si } |u| \geq 1 \end{cases}$$

y recordando que $u = b/a$ en nuestra situación original, vemos que

$$\frac{|a + b| + |a - b|}{|a + b| - |a - b|} = \begin{cases} \frac{b}{a} & \text{si } \left| \frac{b}{a} \right| \geq 1 \\ \frac{a}{b} & \text{si } 0 < \left| \frac{b}{a} \right| < 1 \end{cases}$$

Esta relación nos dice que la ecuación original tiene la solución propuesta en el aludido texto de álgebra únicamente si $b \geq a > 0$ (recuerde que $a > 0$).

Además, también sugiere que si $a \geq b > 0$, entonces la ecuación $(\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x})/(\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}) = a/b$ tiene como solución a $x = 2a^2b/(a^2 + b^2)$. Dejamos al lector interesado la discusión de las soluciones de la ecuación

$$(\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x})/(\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}) = b/a$$

para todos los posibles valores de a y b (sin suponer necesariamente que a es positivo). Sugerimos al lector que trace las gráficas de las relaciones

$$y = \frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}$$

$$y = \frac{b}{a}$$

La calculadora: Rutina o pensamiento

(continuación)

para valores específicos de a y que para un tal valor de a trace las gráficas de la segunda relación para varios valores de b . Por ejemplo, la primera gráfica que se muestra corresponde a un valor de $a = 3$ y valores de b que fluctúan así: -5, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5. La gráfica de la derecha corresponde a los valores $a = -3$ con la misma fluctuación de b .



Figura 10

[Note que las gráficas sugieren fuertemente que sólo para algunos valores de b/a hay soluciones.]

También dejamos al lector la determinación de las soluciones de la ecuación

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{b}{a}x.$$

Trate primeramente de hallar una solución empleando la calculadora y luego resuelva analíticamente. Discuta la naturaleza de las soluciones para los posibles valores de a y b . [Sugerencia: Visualice la ecuación como una proporción y aborde el problema como lo hicimos en el ejemplo anterior. (También puede racionalizar el denominador y luego cuadrar en ambos lados como en el ejemplo anterior.)]

La gráficas que se muestran a continuación son las de las relaciones

$$y = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

para los valores de $a = 3$ y -3 y para valores de b que fluctúan entre los valores de -5, -3, -1, 0, 1, 3 y 5. Note que se sugiere fuertemente que hay dos soluciones a la ecuación cuando hay alguna.

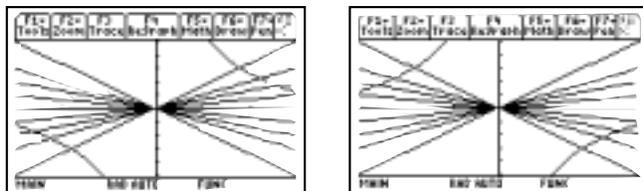


Figura 11

Ejercicio: Investigue las soluciones de las siguientes ecuaciones irracionales:

- a) $\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 = 2x$ [Sol: $x = 3$]
 b) $\sqrt{x-9} - \sqrt{x-18} = 1$ [Sol: $x = 34$]
 c) $\sqrt{x-9} - \sqrt{x-18} = x/15$ [Sol: $x = 22.8246$]

El problema de las ternas pitagóricas consecutivas

Una *terna pitagórica* es una terna de enteros no-negativos (x, y, z) que satisfacen la condición $x^2 + y^2 = z^2$. Por ejemplo, $(0, 1, 1)$, $(3, 4, 5)$ y $(9, 12, 15)$ son ternas pitagóricas. Si una terna pitagórica (x, y, z) satisface la condición $x + 1 = y$, entonces decimos que la misma es una *terna pitagórica consecutiva*. Así pues, $(0, 1, 1)$ y $(3, 4, 5)$ son ternas pitagóricas consecutivas, pero no así $(9, 12, 14)$. Las primeras dos ternas pitagóricas consecutivas son $(0, 1, 1)$ y $(3, 4, 5)$. Un problema interesante es el de determinar una fórmula (ya sea recursiva o directa) la cual genere todas las ternas pitagóricas consecutivas (desde luego, a priori no sabemos si tal colección es o no infinita).

Este problema también invita a la experimentación. Para comenzar, podríamos emplear la calculadora para generar las primeras ternas de la sucesión, con la esperanza de poder descubrir algunos patrones numéricos interesantes que podrían resultar útiles para hallar la solución final del problema. Empleamos una calculadora TI-83 para generar rápidamente una tabla entre cuyas entradas aparecen algunas de las ternas pitagóricas deseadas. Por ejemplo, podríamos emplear una tabla que muestre, para valores consecutivos de enteros no-negativos x , los valores de las siguientes tres cantidades: x , $y = \sqrt{x^2 + (x+1)^2}$, y $\lfloor y \rfloor$ (aquí $\lfloor y \rfloor$ representa el "suelo" o la "parte entera" del entero y , es decir, el entero único que satisface la relación $n \leq x < n + 1$). Note que la expresión $\lfloor y \rfloor$ vale cero si y sólo si y es entero, es decir, si $(x, x+1, y)$ es una terna pitagórica consecutiva. Empleando una calculadora para generar tal tabla se obtienen pantallas como las que se muestran a continuación.

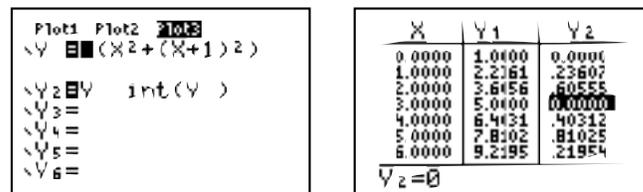


Figura 12

En la tabla se aprecian los primeros dos ternas pitagóricas $(0, 1, 1)$ y $(3, 4, 5)$. Como ya se ha indicado, para identificar las ternas pitagóricas consecutivas en la tabla, basta sólo con examinar la columna $Y2 (= \lfloor y \rfloor)$ para detectar la aparición de "ceros" (los valores de la columna $Y2$ que corresponden a los valores 0 y 3 de $X (= x)$ valen cero; véase la **Figura 12**). Si examinamos la tabla a medida que tomamos valores progresivos de X , podremos constatar que el próximo cero ocurre para el valor de $X = 20$. La terna pitagórica correspondiente es entonces $(20, 21, 29)$.

La calculadora: Rutina o pensamiento

(continuación)

X	Y1	Y2
15.0000	21.9333	93171
16.0000	23.3456	34524
17.0000	24.7579	75884
18.0000	26.1702	17250
19.0000	27.5825	58623
20.0000	29.0000	0.0000
21.0000	30.4114	41381

X	Y1	Y2
115.0000	163.34	34321
116.0000	164.76	75740
117.0000	166.17	17160
118.0000	167.59	58580
119.0000	169.00	0.0000
120.0000	170.41	41420
121.0000	171.83	82840

Figura 13

Después de este paso inicial la exploración se hace un tanto más tediosa, pero con un poco de paciencia llegamos al valor $x = 119$ para obtener la próxima terna pitagórica, a saber, (119, 120, 169). La Figura 14 se muestra el progreso alcanzado hasta el momento:

H	H + 1	Y
0	1	1
3	4	5
20	21	29
119	120	169

Figura 14

Una observación interesante de la tabla se relaciona con los cocientes sucesivos de los valores de x o los valores de y . Por ejemplo, los cocientes consecutivos de los valores de x son $21/3 = 7$ y $119/21 \approx 5.63$, y los de los valores correspondientes a y son $5/1 = 5$, $30/5 = 6$ y $169/30 \approx 5.63$. Resultados del mismo orden de magnitud se obtienen cuando empleamos las ternas pitagóricas que siguen a la última de la tabla. Esta experimentación "inductiva" sugiere que la próxima terna pitagórica ocurre para un valor aproximado de x de 5.6×119 que es alrededor de 666. Si examinamos la tabla correspondiente que comienza con este valor de x y la continuamos examinando a medida que los valores de x aumentan, vemos que el próximo valor de cero en la columna de $Y2$ ocurre para $X = 696$, es decir la próxima terna pitagórica es (696, 697, 985).

X	Y1	Y2
666.0000	942.57	.57364
667.0000	943.99	.98782
668.0000	945.40	.40203
669.0000	946.82	.81624
670.0000	948.23	.23046
671.0000	949.64	.64467
672.0000	951.06	.05888

X	Y1	Y2
698.0000	987.83	.82843
699.0000	989.24	.24264
700.0000	990.66	.65685
701.0000	992.07	.07107
702.0000	993.49	.48528
703.0000	994.90	.89949
704.0000	996.31	.31371

Figura 15

Podríamos continuar explorando de esta manera o escribir un pequeño programa para describir los próximos ternas pitagóricas consecutivos de la tabla. En el programa se indica el último valor de x descubierto y el programa indica el próximo triple en la lista (empleando como dato que el próximo valor de x es del orden de 5.8 veces el valor anterior de x). Por ejemplo, sustituyendo el valor de x del último triple descubierto, $x = 119$,

obtenemos el triple (696, 697, 985); si luego sustituimos $x = 696$, obtenemos a su vez el triple (4,059, 4,060, 5741). La siguiente es una lista de un amigo con calculadora de "precisión infinita" quien entusiásticamente completó la sucesión de ternas hasta la número 20 de la sucesión (la columna de la izquierda es el número de la terna):

7	23660	23661	33461
8	137903	137904	195025
9	803760	803761	1136689
10	4684659	4684660	6625109
11	27304196	27304197	38613965
12	159140519	159140520	225058681
13	927538920	927538921	1311738121
14	5406093003	5406093004	7645370045
15	31509019100	31509019101	44560482149
16	183648021599	183648021600	259717522849
17	1070379110496	1070379110497	1513744654945
18	6238626641379	6238626641380	8822750406821
19	36361380737780	36361380737781	51422757785981
20	211929657785303	211929657785304	299713796309065

La terna número 41 tiene proporciones respetables:

2527961881478169961048032963696,
2527961881478169961048032963697
3575077977948634627394046618865

En la Figura 16 y la Figura 17 se muestra un programa empleado para generar ternas consecutivas y algunos casos particulares de su empleo.

```

PROGRAM: TRIPLES
:Input "A=" A
: int (5.8*A) →A
: J(A²+(A+1)²) →R
: While R-int(R) >
:   0
: A+1 →A
: J(A²+(A+1)²) →R
: End
: Disp A A+1 R
: Stop
    
```

Figura 16

```

PRGM:TRIPLES
A=119
696 00000000
697 00000000
985 00000000
Done
    
```

```

PRGM:TRIPLES
A=696
4059 00000000
4060 00000000
5741 00000000
Done
    
```

Figura 17

La calculadora: Rutina o pensamiento

(continuación)

Como se puede observar, el número en la primera coordenada de las ternas crece rápidamente. Es interesante notar de paso que en algunas calculadoras (como la que estamos empleando en los cálculos de este ejemplo²) la suma de los cuadrados de las primeras dos columnas de la tabla podría resultar en un número que no se puede representar exactamente en la ventanilla de la calculadora. En tal caso la calculadora revierte al formalismo numérico de la aritmética de punto flotante; véase la **Figura 18**. Así pues es fácil ver que extender la tabla puede resultar tarea difícil para las calculadoras de aritmética de punto flotante. Invitamos al lector a hallar las dos próximas ternas pitagóricas de la tabla que hasta ahora hemos completado (es decir, las ternas número 21 y 22).

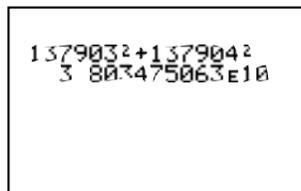


Figura 18

El examen de la tabla nos lleva al descubrimiento de patrones interesantes. Es fácil convencerse que existe una relación recursiva para generar la sucesión de las ternas pitagóricas consecutivas $(a_n, a_n + 1, b_n)$ ($n \geq 1$). Si suponemos por ejemplo que hay una relación lineal que relaciona las primeras coordenadas de las ternas, con las coordenadas de las ternas anteriores, digamos si existen números reales a, b, c tal que

$$a_{n+1} = aa_n + bb_n + c,$$

entonces es fácil buscar los coeficientes a, b y c si los hubiere. Por ejemplo, tomando $n = 0, 1$ y 2 obtenemos tres ecuaciones en tres desconocidas (a, b y c):

$$\begin{aligned} b + c &= 3 \\ 3a + 5b + c &= 20 \\ 20a + 29b + c &= 119 \end{aligned}$$

Podemos resolver estas tres ecuaciones empleando la calculadora,

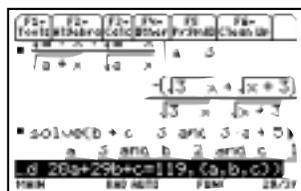


Figura 19

Vemos que la solución es $a = 3, b = 2, c = 1$. Es decir,

$$a_{n+1} = 3a_n + 2b_n + 1.$$

Claro está, esta relación hay que probarla con otros valores de n además de los ya utilizados para ver si en efecto funciona con las otras ternas.

El lector puede verificar que en efecto funciona y puede hacer el cálculo correspondiente con las terceras coordenadas de las ternas. El resultado final es la siguiente relación recursiva.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \quad b_1 = 1 \\ a_{n+1} &= 3a_n + 2b_n + 1 \quad (n \geq 1) \\ b_{n+1} &= 4a_n + 3b_n + 2 \end{aligned} \quad (1)$$

Preguntas naturales que surgen de la experimentación en este problema son las relacionadas al comportamiento asintótico de los cocientes a_{n+1}/a_n y b_{n+1}/b_n y a_n/b_n . De las relaciones anteriores es fácil ver que

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{3a_n/b_n + 2 + 1/b_n}{4a_n/b_n + 3 + 2/b_n} \quad (2)$$

Como ya empezamos a sospechar por (1), la sucesión de ternas pitagóricas es infinita, y en tal caso es fácil ver que $a_n \rightarrow \infty$ y $b_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Si suponemos que a_n/b_n se acerca a un valor límite x (como parece), entonces se obtiene de (2) (tomando límites) que

$$x = \frac{3x + 2}{4x + 3} \quad (3)$$

La solución positiva de (3) es $x = 1/\sqrt{2}$. El lector puede verificar que los valores sucesivos de a_n/b_n se aproximan en efecto a $.707107 = 1/\sqrt{2}$. Empleando nuevamente (1), el lector podrá verificar que los cocientes a_{n+1}/a_n y b_{n+1}/b_n ambos se aproximan al valor $3 + 2\sqrt{2} \approx 5.82$.

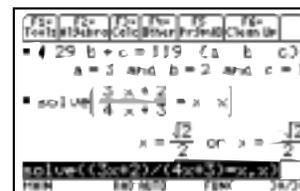


Figura 20

Una dimensión particularmente interesante de este problema (cuyos detalles los autores dejan a los lectores interesados) surge luego de observar que la recursión indicada anteriormente se puede escribir en "forma matricial" de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_0 = 0 \quad b_0 = 1, \quad n \geq 0 \quad (4)$$

² TI-83

La calculadora: Rutina o pensamiento

(continuación)

En este caso los valores propios de la matriz indicada están dados por $\mu = 3 + 2\sqrt{2}$ y $\nu = 3 - 2\sqrt{2}$; véase **Figura 21**. Los cocientes a_{n+1}/a_n y b_{n+1}/b_n parecen aproximarse a μ cuyo valor aproximado es de 5.82.

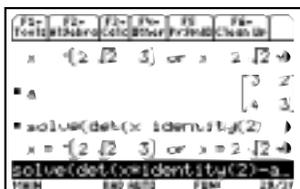


Figura 21

Los lectores interesados pueden verificar que la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

se puede diagonalizar, es decir, es posible hallar una matriz invertible **P** tal que $P^{-1}TP$ es una matriz diagonal **D** cuyas entradas corresponden a los valores propios de **T**. En efecto una matriz **P** con tal propiedad se muestra a continuación; véase la **Figura 22**:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

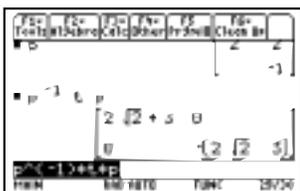


Figura 22

En la siguiente discusión emplearemos la notación:

$$\tau_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, en notación matricial la relación recursiva (1) se convierte en

$$\tau_{n+1} = T\tau_n + b \quad (5)$$

Empleando la relación recursiva (2) y un argumento inductivo es posible demostrar la fórmula matricial (6) (dejamos los detalles al lector interesado; el lector puede imaginar que las matrices actúan como si fueran números reales para sumar las series geométricas que surgen sin miedo alguno) que para $n \geq 0$,

$$\tau_n = PD^nP^{-1}\tau_0 + P(I - D)^{-1}(I - D^n)P^{-1}b \quad (6)$$

(En la relación (6) **I** representa la matriz identidad de dimensión 2.) Calculando explícitamente esta expresión en la calculadora (véase **Figura 23**) tenemos.

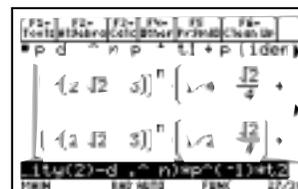


Figura 23

Esto nos da una fórmula explícita para los triples pitagóricos consecutivos (a_n, a_{n+1}, b_n) ($n \geq 0$):

$$a_n = (3 - 2\sqrt{2})^n \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{4} \right) + (3 + 2\sqrt{2})^n \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{4} \right) - \frac{1}{2}$$

$$b_n = (3 - 2\sqrt{2})^n \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right) + (3 + 2\sqrt{2})^n \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right)$$

Invitamos al lector a que investigue la famosa sucesión de Fibonacci, definida por:

$$f_0 = f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (*)$$

cuyos términos iniciales son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (cada término es la suma de los dos anteriores). Empleando una técnica similar a la aquí descrita halle una fórmula explícita para *.

Referencias

Kalnin, R. A., *Algebra y funciones elementales*, Editorial MIR, Moscú, 1973

Campistrous, L.A. y López, J.M., *La calculadora como herramienta heurística, aceptado para publicación*, Revista UNO, Barcelona

Autores

Luis Augusto Campistrous Pérez

Ministerio de Educación de la República de Cuba

Jorge M. López Fernández

Departamento de Matemática,

Universidad de Puerto Rico, Río Piedras

Introducción a la Geometría de la Esfera de Riemann con Cabri Géomètre II™

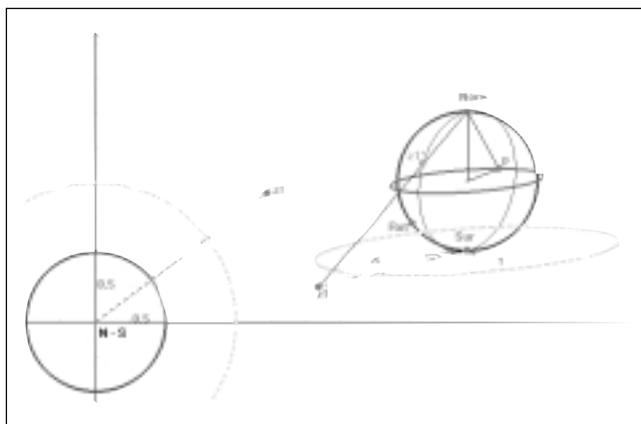
Introducción

La Geometría esférica nos proporciona un ejemplo de Geometría alternativa a la euclídeana, en donde el habitual quinto postulado¹ se transforma para eliminar las paralelas del espacio. Las rectas del plano euclídeano ceden su lugar a las rectas esféricas, que son las circunferencias máximas de la Esfera de Riemann.

En la currícula actual se proporciona al estudiante tan sólo el recurso del álgebra para aproximarse a una comprensión de los principales resultados de la Geometría esférica, con lo cual la visualización de resultados y el sentido común dentro del modelo se vean fuertemente limitados. Esto hace necesario que nuevas propuestas de enseñanza se integren al aula de clases.

La tecnología nos abre una posibilidad que aún tiene un largo camino por recorrer. ¿Cómo utilizar un software bidimensional de Geometría Dinámica como Cabri Géomètre II para simular esta Geometría? He aquí el propósito de este trabajo.

Saltando de un trampolín hacia la esfera: la proyección estereográfica



Para generar la Geometría de la esfera nos valdremos del recurso de utilizar a la proyección estereográfica como medio para lanzar curvas del plano a la esfera².

¹ Nos referimos a la versión de John Playfair del quinto postulado de Euclides: por un punto exterior a una recta dada puede trazarse una y solo una recta paralela a aquella. La versión dada por Euclides puede encontrarse, por ejemplo, en el clásico (Heath, T. L., 1956, *The Thirteen Books of the Elements*, 2nd ed. Vols. 1,2,3. New York: Dover).

² Conocemos como proyección estereográfica a la transformación de un plano en la esfera y viceversa que cumpla los siguientes requisitos: apoyemos el polo sur de la esfera sobre el plano de modo que éste sea tangente a aquella; para encontrar el punto de la esfera que se asocia con un punto particular del plano, tracemos el segmento de recta que une al polo norte de la esfera con el punto dado en el plano; el punto buscado es el punto de intersección del segmento de recta con la esfera; al polo norte de la esfera (única excepción en esta regla de asociación) le corresponde el punto al infinito del plano.

Nuestra primera tarea es identificar las curvas del plano estereográfico que puedan generar circunferencias máximas en la esfera de Riemann. Recordemos que, dependiendo de la orientación que tengan en la esfera, hay tres clases de circunferencias máximas de las cuales las dos primeras nos son muy familiares:

- El ecuador de la esfera estereográfica.
La circunferencia de radio 2 centrada en el origen nos basta para generar el ecuador de la esfera estereográfica.
- Los meridianos de la esfera estereográfica.
Las rectas que pasan por el origen se corresponden a los meridianos de la esfera estereográfica.
- Circunferencias máximas generadas por cortes con planos que pasan por el centro de la esfera y que son oblicuos respecto al ecuador y los meridianos.

Este es el caso "complicado". Procedamos como sigue: comencemos por trazar un punto en el plano estereográfico al que llamaremos $z0^*$; ahora consideremos dos puntos en la Esfera de Riemann que sean diametralmente opuestos y que no se encuentren ni en los polos ni en el ecuador de la figura. Podemos suponer que serán respectivamente los puntos más alto y más bajo con relación al plano estereográfico de la circunferencia máxima que deseamos construir. Así entonces, tomemos por ejemplo al más bajo y llamémosle $z0$. Sea el punto más alto $z1$ y los puntos correspondientes en el plano precisamente el anterior $z0^*$ y otro punto $z1^*$, respectivamente.

La curva buscada deberá pasar por $z0^*$ y $z1^*$; más aún: considerando la proyección de una circunferencia en un plano desde un punto fijo (en este caso el polo Norte de la Esfera), se sabe en primera instancia que la curva buscada es una elipse con los puntos $z0^*$ y $z1^*$ como vértices. También se tiene que el centro de la elipse se encontrará en el punto medio entre ambos.

Para definir adecuadamente a una cónica en Cabri Géomètre II es necesario determinar cinco puntos por los cuales pasa dicha curva. Primeramente, para determinar la posición de $z1^*$ conocida la posición de $z0^*$, observemos que:

- Un meridiano contiene al polo Norte, los puntos $z0$, $z1$ y al polo Sur. Llamémosle $m1$.
- El ángulo entre los puntos $z0$, el polo Norte y $z1$ es un ángulo recto.
- Los puntos $z0^*$ y $z1^*$ se encuentran en el mismo plano a dicho meridiano. El polo Sur es colineal al segmento $z0^*z1^*$ y está entre ellos.
- El triángulo de vértices $z0^*$, polo Sur y polo Norte es semejante al triángulo determinado por el polo Norte, el polo Sur y el punto $z1^*$.

De lo anterior, una forma de trazar $z1^*$ a partir de $z0^*$ es la siguiente: construir la circunferencia de radio 2 en el plano estereográfico, obtener el inverso $z0'$ de $z0^*$ con respecto a dicha circunferencia y después el

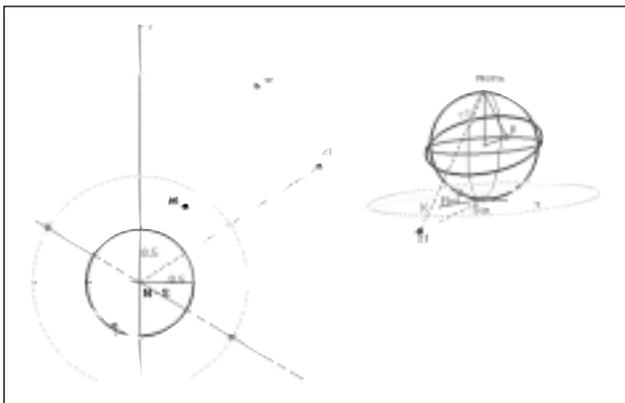
Introducción a la Geometría de la Esfera de Riemann con Cabri Géomètre II™

(continuación)

simétrico de $z0'$ con respecto al origen. El punto así obtenido será $z1^*$.
Resta entonces determinar 3 puntos de la cónica buscada.
Ahora tenemos que:

1. La circunferencia máxima oblicua buscada intersecta al ecuador en 2 puntos.
2. Los puntos de intersección anteriores se encuentran sobre la mediatriz del segmento $z0z1$.
3. El meridiano que forma un ángulo recto con respecto al meridiano $m1$ contiene a la mediatriz anterior. Llamémosle $m2$.
4. La recta que pasa por el origen del plano estereográfico y que es perpendicular al segmento $z0^*z1^*$ es la proyección del meridiano $m2$.

Por las consideraciones anteriores, una forma de generar 2 puntos de la cónica buscada es entonces trazar la recta perpendicular al segmento $z0^*z1^*$ que pase por el origen y encontrar los 2 puntos de intersección de esta recta con la circunferencia de radio 2. Dichos puntos $V1$ y $V2$ están en correspondencia con los puntos de intersección entre circunferencia máxima y ecuador.



Solo falta determinar un punto para completar la definición de la cónica pedida. Sea M el punto medio entre $z0^*$ y $z1^*$; M es entonces el centro de la cónica. Tomemos indistintamente $V1$ o $V2$ y encontremos el simétrico del punto elegido con respecto a M , que también se encontrará en la cónica. El conjunto de cinco puntos está completo.

Pero una vez que utilizamos el comando de cónicas para trazar la elipse requerida, una sorpresa muy grata nos aguarda en el plano estereográfico: la complicada elipse toma la forma de una simple, notable, amigable, hermosa y dócil circunferencia³, lo cual nos lo indica el entorno una vez que acercamos el cursor a la curva. Este descubrimiento hace que el trazo anterior pueda reemplazarse, simplificándolo espectacularmente: una vez

³ Parece existir una omisión al no designar con un nombre específico tal clase de circunferencias. Por ejemplo en (Weisstein, E. 1998, The CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, pp. 1736) sólo se menciona que una proyección estereográfica es un mapeo en el cual los círculos máximos son proyectados en círculos y loxodromas en espirales.

que se ha conocido $z1^*$ a partir de $z0^*$, se traza el punto medio M y entonces se dibuja la circunferencia con centro en M y radio el segmento de M a $z0^*$.

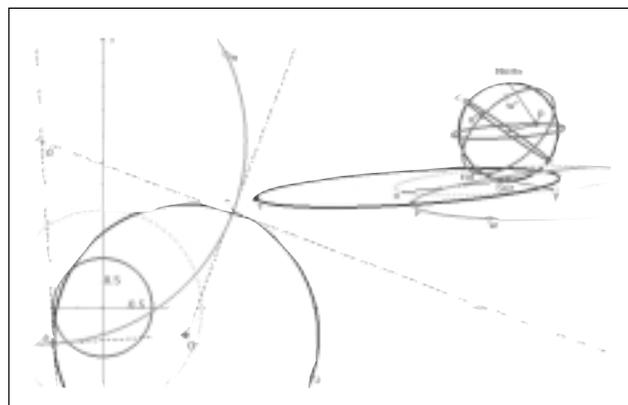
Mediante la manipulación de los ejes tridimensionales (vía el punto que hemos designado como Rot), podemos observar a la circunferencia máxima en el plano que pasa por el centro de la Esfera. Así también es posible identificar los puntos más bajo y más alto en ella (vía el punto utilizado para recorrer la circunferencia del plano estereográfico).

En el siguiente espacio trataremos tan sólo dos problemas de construcción en la Esfera de Riemann, que se apoyan en el hecho de que la proyección estereográfica es un mapeo conforme, es decir, que preserva ángulos.

Problema 1

Dada una circunferencia máxima y un punto en ella, construir la circunferencia máxima que es perpendicular a ella y que pasa por el punto dado.

Sean C la circunferencia máxima en la Esfera de Riemann y C^* la circunferencia asociada en el plano estereográfico. El trazo comienza por C^* y un punto a sobre ella. Bajo proyección estereográfica se generan C y a' respectivamente en la Esfera.



Ya que a pertenece tanto a la circunferencia C^* como a la circunferencia buscada, en este punto de intersección el radio de C^* es tangente para la circunferencia buscada y viceversa. Por otra parte si a' es un punto de C , también lo es el punto diametralmente opuesto a él, al cual llamaremos b' ; sea b el punto correspondiente en el plano estereográfico. Ya que b es también punto de intersección entre la circunferencia C^* y la circunferencia pedida, para encontrar el centro de esta circunferencia basta trazar tangentes a C^* que pasen por dichos puntos y localizar su punto de intersección O . El radio buscado es, por supuesto, la distancia desde dicho punto hasta cualquiera de los puntos a o b .

Introducción a la Geometría de la Esfera de Riemann con Cabri Géomètre II™

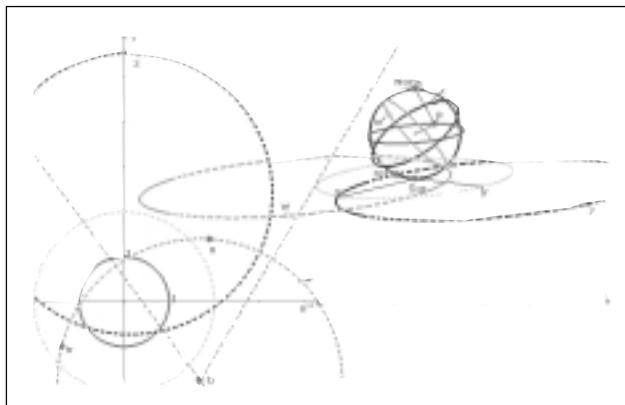
(continuación)

Problema 2

Dada una circunferencia máxima C^* y un punto en la esfera fuera de ella, construir la circunferencia máxima que es perpendicular a ella y que pasa por el punto dado.

Sean C la circunferencia máxima en la Esfera de Riemann y C^* la circunferencia asociada en el plano estereográfico. El trazo comienza por C^* y un punto n' que no pertenezca a ella. Bajo proyección estereográfica se generan la circunferencia C y el punto n correspondientes respectivamente en la Esfera. Para generar una circunferencia perpendicular a C^* que pase por n' se necesita una circunferencia ortogonal a C^* que pase por n' , la cual pasará también por el punto n'' inverso de n con respecto a la circunferencia C^* . Además, en la Esfera los puntos correspondientes a n y el diametralmente opuesto, pertenecerán a la misma circunferencia C . Por esto, el punto en la Esfera correspondiente a n' en el plano estereográfico, así como el correspondiente a su inverso con respecto a la circunferencia C^* , son dos puntos de la circunferencia máxima perpendicular buscada.

El centro O de la circunferencia buscada en el plano estereográfico es la intersección de la mediatrices entre los pares de puntos (n, n') , y (n, n'') .



Conclusión

En este artículo se ha mostrado un ejemplo en el cual puede utilizarse un software y bidimensional para explorar propiedades geométricas tridimensionales. Para el caso que nos ocupa aquí, la proyección estereográfica es un recurso muy adecuado que nos permite el salto a otras dimensiones, con lo cual podemos ampliar nuestra visualización a una Geometría sin paralelas.

La inducción de una métrica a esta Geometría esférica no se ha tratado en este artículo, pero una exploración cuidadosa de lo que se ha construido indicaría que en el plano estereográfico, aún dentro de la misma circunferencia del tercer tipo estudiado aquí, dos arcos de igual longitud pueden mapearse a arcos de circunferencia máxima diferentes.

La exploración de muchas propiedades matemáticas es posible merced a las nuevas tecnologías en el aula, que hacen accesibles y visuales profundas relaciones que antes eran tema de sólo unos cuantos. Particularmente, Cabri Géomètre II es un paquete de Geometría Dinámica que permite popularizar muy diversos temas científicos a través de construir modelos geométricos. La labor constructiva es una tarea en la cual los alumnos pueden descubrir su pasión por la Matemática

Referencias

- Churchill, R., Brown, J. (1985). *Complex variables and applications*. Mc Graw Hill. USA.
- Coxeter, H. M. S. (1988). *Fundamentos de Geometría*. Editorial LIMUSA. México.
- Díaz Barriga, E., (2000). *Para la didáctica de las cónicas: historia de una construcción geométrica*. Revista IPN, Arte, Ciencia: Cultura. Julio - Agosto 2000.
- Eves, H., (1985). *Estudio de las Geometrías*, Vol. I, pgs. 174-177. UTEHA. México.
- Heath, T. L., (1956). *The Thirteen Books of the Elements*, 2nd ed. Vols. 1,2 3. New York: Dover.
- Rousselet, M. (1995). *Dessiner L'espace ou Comment employer Cabri-Géomètre en géométrie dans l'espace*. Editions Archimede. (France).
- Schwerdtfeger, H., (1979). *Geometry of complex numbers*. Dover Publications. New York, USA.
- Weisstein, E., (1999). *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. CRC Press LLC. USA.

Aplicaciones al álgebra lineal utilizando Derive™

Resumen

En este artículo, el autor logra construir una serie de procedimientos que permiten resolver seis problemas prácticos pero a la vez de suma utilidad en Álgebra Lineal y sus aplicaciones. Aprovechando la enorme versatilidad que ofrece el programa de álgebra computacional Derive y las ideas que aportan algunos métodos de demostración de estas propiedades, logra un equilibrio entre la síntesis y la eficiencia de dichos programas.

Palabras claves

Matemáticas, Álgebra Computacional, Álgebra Lineal, Programación.

En muchas ocasiones nos vemos limitados para presentar ejemplos interesantes en Álgebra Lineal porque resulta difícil construirlos, no sólo por el cúmulo de operaciones aritméticas que conllevan, sino también por la misma dificultad desde el punto de vista teórico que implican estas construcciones. Ejemplos que corroboran lo que aquí se afirma pueden ser, el generar manualmente matrices no singulares con coeficientes enteros de tal forma que su inversa también tenga coeficientes enteros, o construir matrices que no sean triangulares y que tengan unos valores propios que requiera el usuario.

Estos y otros problemas son los que pretendo resolver mediante unos archivos que he construido empleando el programa de álgebra computacional Derive y que pueden ser utilizados tanto en las versiones para Windows® como para DOS.

PRIMER PROBLEMA

Construir una función que permita generar aleatoriamente matrices no singulares de cualquier orden, de tal forma que sus inversas también sean invertibles.

Para ello, partimos de una "matriz semilla", triangular superior que tenga sobre la diagonal 1 o -1, y que genere aleatoriamente los números por encima de la diagonal

$$MT(n) := \text{VECTOR}(\text{VECTOR}(\text{IF}(i < j, 0, \text{IF}(i = j, (-1)^i, \text{RANDOM}(2) + 1)), i, 1, n), j, 1, n)$$

Se construye una función FI tal que, dada una matriz v permite sumar la fila j multiplicada por un escalar a a la fila i.

$$FI(v, i, j, \alpha) := \text{VECTOR}(\text{IF}(m = i, v_i + \alpha v_j, \text{EL}(v, m)), m, 1, \text{DIMENSION}(v))$$

Siendo:

$$EL(v, m) := \text{ELEMENT}(v, m)$$

Empleando la traspuesta de una matriz, se construye a partir de la función FI la función FC tal que, dada una matriz v permite sumar la columna j multiplicada por un escalar a la columna i.

$$FC(v, i, j, \alpha) := FI(v^T, i, j, \alpha)$$

Llamando ID(n) a la matriz idéntica de orden n, se construye la matriz que estamos buscando MATRIZ_ENTERA(n), de la siguiente manera:

$$MATRIZ_ENTERA(n) := \left(\prod_{h=1}^{n-1} \prod_{k=h+1}^n FC(\text{ID}(n), h, k, \text{RANDOM}(2) \cdot (-1)^h) \right) \left(\prod_{k=1}^{n-1} \prod_{h=k+1}^n FC(\text{ID}(n), h, k, \text{RANDOM}(2) \cdot (-1)^k) \right) MT(n)$$

A manera de ejemplo puede calcularse MATRIZ_ENTERA(n) para n = 2,3,4,5,6 y 7.

SEGUNDO PROBLEMA

Construir una función que permita encontrar en forma inmediata las coordenadas de un vector con respecto a una base.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

Sean Ω la base, Φ el vector y Ψ el vector de coordenadas de Φ con respecto a la base Ω; la función es:

$$CL(\Omega, \Psi, \Phi) := \text{IF}(\text{DET}(\Omega) = 0, \text{"}\Omega \text{ no es base del Espacio Vectorial"}), \text{SOLVE}(\text{EXPAND}(\text{SUM}(\text{EL}(\Omega, k) * \text{EL}(\Psi, k), k, 1, \text{DIMENSION}(\Omega)) = \Phi, \Phi), \Psi)$$

A manera de ejemplo se puede calcular:

$$1^\circ) \quad CL \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 11 \end{bmatrix}, [s, t, n], [x, y, z] \right)$$

$$2^\circ) \quad CL \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & -4 \\ 13 & -9 & -19 & -16 \\ -9 & 6 & 14 & 9 \end{bmatrix}, [s, t, n, m], [x, y, z, w] \right)$$

TERCER PROBLEMA

Construir una función que permita generar matrices con valores propios determinados. Los pasos a seguir son los siguientes:

$$ID(n) := \text{IDENTITY_MATRIX}(n)$$

$$DI(v) := \text{DIMENSION}(v)$$

$$MA(n) := \text{VECTOR}(\text{VECTOR}(\text{IF}(i < j, 0, \text{IF}(i = j, (-1)^i, 1)), i, 1, n), j, 1, n)$$

A continuación, se construye una "matriz semilla", triangular superior que tenga sobre la diagonal los valores propios y que genere aleatoriamente los números por encima de la diagonal,

$$MVP(v) := \text{VECTOR}(\text{VECTOR}(\text{IF}(i < j, \text{RANDOM}(2) + 1, \text{IF}(i > j, 0, \text{EL}(v, i))), i, 1, DI(v)), j, 1, DI(v))$$

Aplicaciones al álgebra lineal utilizando Derive™

Luego, una función como la que se pide es:

$$LL(v, p) := \left(\prod_{k=1}^{D(v)-1} \prod_{h=k+1}^{D(v)} FC(ID(DI(v)), k, h, (-1)^k) \right)^p * MA(DI(v)) * MVP(DI(v)) \left(\prod_{k=1}^{D(v)-1} \prod_{h=k+1}^{D(v)} FC(ID(DI(v)), k, h, (-1)^k) \right)^p * MA(DI(v))^{-1}$$

Finalmente se construye una función que nos permita ver la matriz, el polinomio característico y los valores propios:

$$\left[\begin{array}{l} \text{"Matriz =" } \\ \text{"Polinomio Característico =" } \\ \text{"Valores Propios =" } \end{array} \begin{array}{l} LL(v,p) \\ EXPAND(PRODUCT(x - EL(v,k),k,1,DI(v)),x) \\ VECTOR(\alpha_k = EL(v,k),k,1,DI(v)) \end{array} \right]$$

A manera de ejemplo pueden calcularse:

POLINOMIOS_Y_MATRICES([1, -2, 3], 5)
 POLINOMIOS_Y_MATRICES([1, 2, 3, 4], 3)
 POLINOMIOS_Y_MATRICES([1, 2, 2, -4, 5], 4)
 POLINOMIOS_Y_MATRICES([2, 2, -4, -4, 5, 6], 4)
 POLINOMIOS_Y_MATRICES([1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -3, 3, 6], 5)

CUARTO PROBLEMA

Dada una base v del espacio vectorial de partida y una base w del espacio de llegada, construir la transformación lineal que envía a v en w .

La función es la siguiente:

$$T1(v, x, a, w) := \left(\sum_{j=1}^{D(w)} EL(RHS(EL(SOLVE(EXPAND(\sum_{k=1}^{D(v)} EL(v, k) * EL(x, k) = a, a), x), 1)), j) * EL(w, j) \right)$$

Finalmente puede presentarse de la siguiente manera:

$$TL(v, x, a, w) := ["\sigma(", a, ") = ", T1(v, x, a, w)]$$

A manera de ilustración pueden calcularse las transformaciones lineales que envían la base v de \mathfrak{R}^n en la base w de \mathfrak{R}^m para los siguientes ejemplos:

- $v = \{[-1, 2], [2, -3]\}$, $w = \{[1, 2, 3], [3, 4, 5]\}$.
- $v = \{[1, 2, 5], [-3, 4, 6], [2, 0, 0]\}$, $w = \{[1, 2, 5, 9], [3, -5, 8, -2], [7, -9, -3, 4]\}$.
- $v = \{[-1, 2, 1, 1, 2, 2], [3, -5, -2, -2, -4, -5], [10, -17, -8, -6, -12, -16], [-9, 15, 9, 4, 7, 14], [-29, 49, 28, 14, 25, 47], [-3, 5, 2, 2, 6, 2]\}$,
 $w = \{[-1, 1, 2, 1, 1], [3, -2, -4, -1, -2], [13, -9, -19, -4, -7], [-7, 5, 12, 2, 3], [-17, 12, 30, 4, 5], [-8, 6, 9, 4, 1]\}$.

QUINTO PROBLEMA

Dadas dos bases v y w de \mathfrak{R}^n ($n = 2, 3$), construir una función que permita generar las matrices de paso de v a w y de w a v .

La función que nos puede servir es:

$$MAT_PASO(v, w, R) := VECTOR(RHS(EL(SOLVE(EXPAND(\sum_{k=1}^{D(v)} EL(v, k) * EL(R, k) = EL(w, j), EL(w, j)), R), 1)), j, 1, DI(v))$$

Finalmente se construye la siguiente función que permite dar una presentación más cómoda:

$$MATRIZ_DE_PASO(v, w, R) :=$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{"Base inicial B =" } \\ \text{"Base final D =" } \\ \text{"Matriz de paso de B a D =" } \\ \text{"Matriz de paso de D a B =" } \end{array} \begin{array}{l} v \\ w \\ MAT_PASO(v,w,R) \\ MAT_PASO(w,v,R) \end{array} \right]$$

A manera de ejemplo calcúlese $MATRIZ_DE_PASO(v, w, R)$ para los siguientes casos:

- $v = \{[-1, 2], [3, -5]\}$, $w = \{[-1, 1], [2, -1]\}$.
- $v = \{[-1, 2, 2], [4, -7, -6], [14, -24, -21]\}$,
 $w = \{[-1, 1, 2], [4, -3, -6], [13, -10, -21]\}$.

SEXTO PROBLEMA

Construir una función que permita calcular para cada valor propio de una matriz los correspondientes vectores propios.

$$VECT_PRP(u, \beta, r) := EL(RHS(SOLVE(VECTOR(EL(EL(ROW_REDUCE(u - \beta ID(DI(u))), [r] = VECTOR([0], k, 1, DI(u))), k, 1, k, 1, DI(u)), r)), 1)$$

Precision: = Exact

A manera de ejemplo se puede calcular:

- VECT_PRP([[-7, 3], [-16, 7]], -1, [x, y])
- VECT_PRP([[0, 0], [0, 0]], 0, [x, y])
- VECT_PRP([[2, -3, 2], [0, 0, 1], [0, 2, 0]], 2, [x, y, z])
- VECT_PRP([[0, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 1, 2, 0]], 1, [x, y, z, s])
- VECT_PRP([[-1, -2, 0, 3, 10, -3], [14, -2, 9, 27, -8], [-9, 2, -6, -17, 5], [-19, 2, -12, -37, 11]], 0, [x, y, z, s, t])

Referencias

I. Castro, *Cómo Hacer Matemáticas Con Derive*, Reverté de Colombia S.A., Bogotá, 1992.

E.D. Nering, *Algebra Lineal y Teoría de Matrices*, Editorial Limusa, México 1977.

Derive User Manual, Version 3, Soft Warehouse, Honolulu, Hawaii, USA, 1994.

Enseñar la demostración en Geometría vs Enseñar la demostración en Geometría

Si usted llegó aquí posiblemente lo hizo porque creyó que había un error de tipografía o que los que esto escriben se equivocaron en el título, pero no es así, no hay tales errores. En cierto sentido usted estuvo en lo correcto al dar un sólo significado a la palabra "enseñar". Pero queremos referirnos a dos interpretaciones posibles de un deber docente. Lo invitamos a que prosiga con la lectura de este artículo.

¿Que es Enseñar? En un primer sentido, muy inmediato, *enseñar* se trata como sinónimo de *dejar ver*, *de mostrar*, *de poner a la vista de alguien algo*. Cuantas veces el significado de enseñar se vincula al de la voz usual "enseñame lo que tienes en la mano"; posiblemente dirá ¿y esto que tiene que ver con el actuar docente? pues bien, ésta forma de *enseñar* es una práctica muy difundida en nuestro medio educativo, ya que tiene de su lado el ejercicio empírico y la tradición de la comunicación oral. Esta *enseñanza* no siempre incorpora propósitos formativos en el alumno tales como: la independencia, la exploración autónoma y menos aún la búsqueda de los contra-argumentos científicos. Al mismo tiempo, una recomendación administrativa frecuente a los docentes se hace en el mismo sentido: "dejemos ver lo que tenemos en la mano". Este enfoque es necesario en muchas condiciones, pero existen algunas otras tareas pendientes por realizar.

Otra interpretación de ¿qué es enseñar?, involucra obligaciones en los actores educativos. Bajo esta óptica, enseñar es, no solamente dejar ver, sino buscar los métodos o estrategias de que lo enseñado tenga un significado congruente con los fenómenos en estudio. Esto acarrea un compromiso al docente y otro al estudiante: al primero, el diseño de actividades educativas en las cuales el que explore encuentre elementos que le den independencia y formación en un punto de vista científico, a la par hallar ahí universos para crear y explorar con posibilidad de equivocarse y rectificar (Sagan, 1997); por su parte el estudiante debe participar activamente, declinando los argumentos de autoridad y juzgar siempre con criterios científicos (Sagan, 1996), que debe conocer e interiorizar, lo que por supuesto se dará si las actividades propuestas lo permiten.

Y por esto el título de este artículo es *Enseñar la demostración vs Enseñar la demostración* (muy sintéticamente, dejar ver la demostración vs buscar estrategias para que la demostración tenga un significado). Señalado lo anterior, hagamos aquí una revisión de algunos usos docentes en el campo de la Geometría.

La enseñanza de la Geometría que nos trae el docente al aula usualmente se circunscribe a un espacio donde él es quién carga con la tarea de proponer los fenómenos geométricos a estudiar, las condiciones que deben cumplir las figuras, las figuras iniciales y los trazos auxiliares necesarios; tiene, además, la responsabilidad de conocer el camino correcto que nos asegure el tránsito de tierra inhóspita e indómita a puerto cálido, paradisiaco y seguro (muchas dimensiones pueden encontrar aquí razones para justificarse).

¿Cuántas libretas tienen registradas exactamente la misma figura que el profesor ha utilizado para sus argumentos?, ¿cuántos estudiantes reproducen, en su forma de expresión matemática, el estilo del profesor en boga?, y más aún ¿que diferencias hay entre las expresiones utilizadas por el profesor y las expresiones usadas por un estudiante? es decir ¿no serán meras repeticiones del estudiante?. ¿Cuántas veces como profesores nos paramos frente al pizarrón, escribimos el teorema, dibujamos la figura, construimos lo necesario y hacemos la demostración, enseñamos la demostración a nuestros estudiantes, es decir, sólo les dejamos ver a nuestros estudiantes, cómo actuamos ante este problema y cómo hacemos los pasos necesarios para llegar al resultado que nosotros deseamos, más esto es deseable si nuestros estudiantes fueran expertos y entendieran el por qué de ese actuar. Se menciona en (Garuti et Boero, 1998) la necesidad por parte del estudiante de encontrar la "unidad cognitiva de un teorema" y que se basa en la continuidad entre la producción de conjeturas y la posibilidad de construir la prueba (Garuti et Boero, 1998) y es aquí donde vemos que enseñando no estamos promoviendo esta continuidad.

Para la mayor parte de los casos¹, no existe en ellos ni la certeza de que el teorema dado es algo por demostrar, menos aún verán la necesidad de justificar cada paso. El argumento cae por el peso de la lógica, pero no se interioriza, no se contrasta en distintos dominios al dominio de validez, por ejemplo podemos referirnos a un estudio comparado entre las geometrías euclidianas y no-euclidianas (Díaz Barriga, E. 1997).

Una propuesta que hacemos para transitar de enseñar a enseñar es la incorporación de software educativo de realidad aumentada², como Cabri Géomètre II™, que nos apoye para desarrollar habilidades, formales e informales en nuestros estudiantes y que consideramos necesarias para encontrar significado a una demostración; esto como una posibilidad entre muchas otras. El conocimiento de este poderoso software (y de un manejo muy sencillo), por parte de los profesores, nos permitirá encontrar un camino para cruzar de enseñar a enseñar, ya que a partir de este "logiciel" (como dicen los franceses) podemos empezar a desarrollar estrategias docentes, las cuales pueden preparar el camino para que nuestros estudiantes entren al mundo complejo y abstracto de una demostración matemática. Las actividades utilizando software dinámico, como Cabri Géomètre II, nos permitirán apoyar al estudiante en la construcción de conjeturas, la evidencia (tal vez una prueba) visual y a partir de allí propiciar el entendimiento y producción de la prueba formal.

¹ Si pensamos en estudiantes de bachillerato, donde uno de los objetivos del curso es tener conocimiento del método axiomático.

² Software educativo de realidad aumentada. Paquete de cómputo de propósito de aprendizaje en donde los objetos pueden ser percibidos más extensamente (mediante el empleo de longitudes, coordenadas, tablas, ecuaciones, propiedades, etc.). Para Jean-Marie Laborde (conferencia en el Instituto Latinoamericano de Comunicación Educativa -ILCE-, Ciudad de México, Agosto de 1997), el término realidad aumentada se contraponen al de realidad virtual, pues cuando los objetos de realidad aumentada, que se encuentran inmersos en el entorno, se manipulan, manifiestan una gran similitud con respecto a las propiedades de los objetos que emulan, en oposición a aquellos entornos donde los objetos no necesariamente exhiben propiedades que se correspondan con los objetos que emulan.

Enseñar la demostración en Geometría vs Enseñar la demostración en Geometría

(continuación)

Al trabajar con los estudiantes una demostración en Geometría, podemos distinguir, entre otros, varios momentos:

1. La determinación del fenómeno a estudiar.
2. Los recursos de los que se dispone para estudiarlo.
3. La exploración de los componentes del fenómeno.
4. La identificación de relaciones que son útiles entre los componentes de las que son circunstanciales o particulares.
5. El razonamiento formal (que debe tomar en cuenta los hechos experimentales).
6. La búsqueda de invariantes geométricos y generalizaciones del fenómeno en estudio.

Mostraremos cómo con un paquete de Geometría Dinámica como Cabri Géomètre II™ podemos intervenir didácticamente en cada uno de estos momentos y apoyarnos en él, para **enseñar** la Demostración en Geometría.

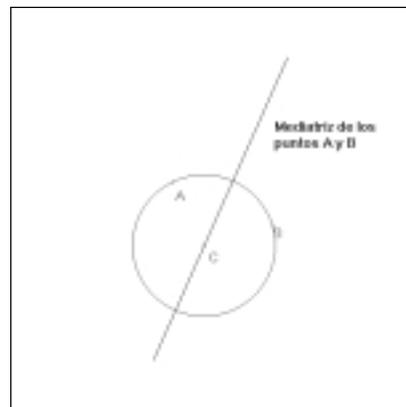
Un ejemplo: explorando la mediatriz con un punto móvil en el plano

Dibuje un círculo de centro O. Después, dibuje un punto A sobre el círculo y otro punto B en cualquier otra parte del plano. Finalmente construya la mediatriz entre los puntos A y B. Aquí los trazos han sido un tanto al azar, casi lo que haría un novato al encontrarse en un entorno Cabri Géomètre II por primera vez. No se trata de dibujar tan sólo sino de explorar, ¿qué se puede descubrir aquí?



Ya que B es un punto libre en el plano, arrastre el punto por el plano. El docente con experiencia empieza a intervenir: ¿qué tenemos cuando el punto B pasa sobre el círculo?

La manipulación se hace más experta cuando se contrasta el movimiento libre contra el movimiento del punto B perceptualmente sobre el círculo. Aquí nos referimos a que el estudiante sólo usa el arrastre del punto sin vincularlo al círculo aún. Llamamos a este momento *la determinación del fenómeno a estudiar*, pues el sujeto empieza a definir el dominio de validez que le interesa.



Con la intervención del comando de redefinición de objetos, el estudiante deja el movimiento completamente libre del punto B y lo cambia por un movimiento restringido de B dentro del círculo.

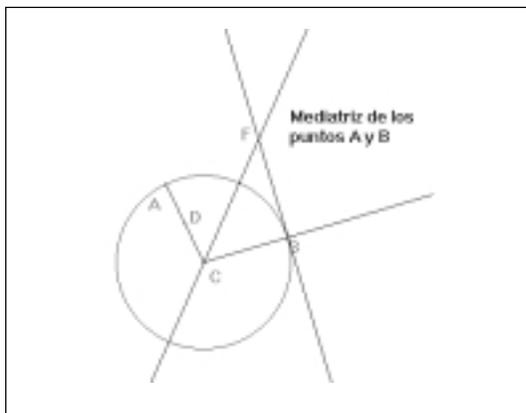


La manipulación de B genera ya una conjetura *perceptual* (indistintamente antes o después de restringir el movimiento de B): la mediatriz entre A y B "se ve que pasa por" el punto C cuando B se mueve en el círculo. Otra intervención del profesor que puede resultar inquietante a los estudiantes: esa relación, ¿depende del radio del círculo o de la posición del centro O del círculo? Y es aquí que el estudiante debe *explorar los componentes del fenómeno*.

El entorno Cabri Géomètre II en extenso contiene comandos que pueden resolver un problema como este desde una perspectiva numérica, desde una perspectiva vectorial, o desde la perspectiva de la geometría analítica, además de la perspectiva sintética. Con antelación, el profesor puede elegir qué comandos estarán a disposición del alumno (pueden ser todos o sólo los comandos de la geometría sintética; puede presentarse un entorno vectorial; pueden haber macros o no, etc.), determinando con ello *los recursos de los que se dispone para estudiar el problema*. Aquí el profesor ha diseñado las condiciones del problema.

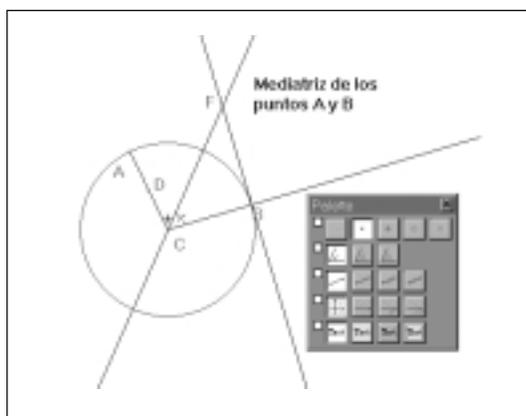
Enseñar la demostración en Geometría vs Enseñar la demostración en Geometría

(continuación)



Toda construcción geométrica entraña el secreto de encontrar los trazos auxiliares que permitan reconocer las relaciones útiles en los elementos del problema. Es aquí donde el alumno ensaya trazando perpendiculares, triángulos, puntos medios, medianas, segmentos, etc. Una intervención en esta dirección no es proponer ya "la" construcción o "el" trazo (es decir, dar sin preámbulo la solución que daría el profesor mismo), sino más bien ayudar a interpretar al estudiante si alguna construcción o trazo propuesto por el mismo, le permite justificar de alguna forma su conjetura perceptual.

En el problema que tomamos como ejemplo, tenemos herramientas para construir triángulos, herramientas para marcar las congruencias de ángulos y segmentos (Cortes, C., Díaz Barriga, E., 1999). El uso de estas marcas puede ser sugerido por el profesor hasta el momento en que se encuentra un argumento matemático convincente que apoye la identificación de algún elemento como objeto congruente con uno previamente construido. Este es un recurso pertinente en la práctica geométrica que no se contrapone con la práctica usual de escritura formal a dos columnas.



En el proceso seguido anteriormente debemos resaltar **que se busca favorecer con esta actividad la construcción de los teoremas y sus demostraciones**, no como ejercicios que apenas comienzan con la declaración "pruebe que", sino con la formación de un cuerpo más completo de conocimiento: lo que se ha denominado "Unidades Cognitivas" (Mariotti et al. PME Lahti 97; Boero, Garuti, Mariotti, PME Valencia 96). Procediendo de esta manera, se busca involucrar más al estudiante con la construcción de su conocimiento (mencionemos de paso que los ejercicios del tipo "pruebe que", acarrearán el inconveniente de que el alumno debe comenzar por familiarizarse con un lenguaje que no necesariamente es el suyo, con elementos y/o relaciones que no ha explorado y de los cuales puede no contar con referencias). Buscamos, pues, dar *significados* a los teoremas y sus demostraciones.

Así, el teorema y su demostración se encuentran *cognitivamente* en una posición distinta a aquella en la que se hallarían si se partiera de un ejercicio del tipo señalado arriba. Un pequeño examen (para el lector y también para los que esto escriben): ¿puede usted escribir un enunciado y la prueba correspondiente en base a lo desarrollado en esta actividad? Si cree que le hemos hecho trampa, busque algunos estudiantes sin compromiso, propóngales esta secuencia y la tarea formal correspondiente. ¿Es más difícil?

Una vez que se termina con el ejercicio "fabricado en las condiciones ideales de laboratorio" por el maestro, ¿qué puede revivir de interés en él?

Aquí hay lugar para la audacia, para preguntas valientes; la Matemática no es una ciencia acabada: la *búsqueda de invariantes geométricos y generalizaciones del fenómeno en estudio*, es una fuente continua de nuevas proposiciones. Y aún en el microuniverso que es el aula (o más todavía, en el plano del conocimiento individual) hay preguntas no resueltas. Se puede probar suerte con otras curvas, hay para todos los gustos: las cónicas pueden ser creadas en este entorno mediante 5 puntos en el plano; los lugares geométricos nos permiten acceder a lemniscatas, cardioides, epicicloides e hipocicloides, etc. El universo en estudio lo define usted mismo.

Se pueden trabajar condiciones especiales dependiendo del caso. O estudiar la curva que genera el punto medio de la mediatriz cuando un extremo se mueve hacia el otro (o los puntos que dividen en n partes iguales a la mediatriz cuando A está fijo y B se mueve sobre la curva). Porque después de todo, el sólo llegar a una conjetura perceptual puede dar pie a un esfuerzo intelectualmente interesante.

Enseñar la demostración en Geometría vs Enseñar la demostración en Geometría

(continuación)

Conclusiones

Finalmente, resaltamos dos aspectos: el primero va en relación con la necesidad de hacer consciente cuál es nuestra actividad en el aula como profesores. Esto es ¿queremos *enseñar* o por el contrario nos interesa *enseñar*?

El segundo y no menos importante tiene que ver con la utilización de software de geometría dinámica que nos apoye en nuestra actividad docente; aquí pueden surgir una serie de preguntas entre ellas una muy importante es: ¿cómo se usa el software y que podemos hacer con él?, pero eso, mi querido lector, como se dice en México "es harina de otro costal", lo invitamos a leer el siguiente artículo titulado: "**Ya tengo el softwarey ¿ahora qué?**"

Muchos docentes hoy en día en nuestro país podrían inclinarse aún a pensar que las computadoras en la clase de Matemática son una extravagancia. La Matemática reciente cuenta con ejemplos en donde la computadora fue usada para probar algún resultado (el teorema de los cuatro colores nos ofrece un notable testimonio). En el terreno didáctico, en este artículo hemos expuesto una actividad que ejemplifica cómo se reduce, en un sentido auténtico, la distancia entre un teorema y su demostración, apoyándonos extensamente en el uso de la computadora. Siguiendo a Kemeny, diríamos "si no usas la computadora en el salón de clase estás privando a tus estudiantes de una maravillosa herramienta pedagógica y no los estás preparando para el mundo real".

Referencias

Cortés, C., Díaz Barriga, E., 1999. *Software y quehacer matemático: Los paquetes a través del análisis de las interfaces.* En prensa.

Cortés, C., Díaz Barriga, E., 1999. *Ya tengo el softwarey ¿ahora qué?*, En prensa.

Díaz Barriga, E. 1997. *Geometría euclidiana vs. Geometría no euclidiana: Enseñanza con manipulables y paquetes de Geometría Dinámica. Memorias del Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática.* Sonora, México.

<http://polya.dme.umich.mx/eventmem/semnal8/Inicio.html>

Garuti et Boero, 1998. *Cognitive unity of theorems and difficulty of proof.* En press.

Kemeny, 1992.

Laborde, Jean-Marie 1997. *Conferencia en el Instituto Latinoamericano de Comunicación Educativa -ILCE-, Ciudad de México, Agosto de 1997.* México.

Sagan, C. (1997). *El mundo y sus demonios.* Editorial Planeta. México.

Sagan, C. (1996). *La ciencia como una luz en la oscuridad.* Editorial Planeta. México



Acerca de los autores:

<i>Autores</i>	<i>Institución/Organización</i>	<i>País</i>
La calculadora: Rutina o pensamiento		
Luis Augusto Campistrous Pérez Jorge M. López Fernández	Ministerio de Educación Universidad de Puerto Rico, Recinto Río Piedras	REPÚBLICA DE CUBA PUERTO RICO

Introducción a la Geometría de la Esfera de Riemann con Cabri Géométre II™

María Dolores Hernández Torres	Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN	MÉXICO
Gabriela Esmeralda Orozco Durán	Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN	MÉXICO
Eugenio Díaz Barriga Arceo	Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN	MÉXICO

Aplicaciones al álgebra lineal utilizando Derive™

Iván Castro Chadid	Pontificia Universidad Javeriana Universidad Nacional de Colombia	COLOMBIA
--------------------	--	----------

Enseñar la demostración en Geometría vs Enseñar la demostración en Geometría

Carlos Cortés Zavala	Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo Cinvestav – IPN Conacyt Proyecto Alfa Laboratorio Leibniz Université Joseph Fourier	MEXICO
Eugenio Díaz Barriga Arceo	Cinvestav-IPN Conacyt Proyecto Alfa Laboratorio Leibniz Université Joseph Fourier	MEXICO

Los Representantes de Texas Instruments en su País:

MEXICO

Erica Zapata

TI MEXICO TRADE, S.A. de C.V.
Montecito No. 38
World Trade Center
Piso 34, Oficina 17, Col. Nápoles
México, D.F. C.P. 03810
Email: ezapata@ti.com
Tel: 01-5-488-2244 Ext. 113
Fax: 01-5-488-2234

PUERTO RICO

Salvador Martínez

5275 Ridgeline Drive, Unit B
Brownsville, Texas 78520
Email: smartinez@ti.com
Tel: (956) 554-9236 (en E.E.U.U.)
Fax: (956) 554-9237

ARGENTINA, CHILE y URUGUAY

Juan Melín

Malaga 115, Oficina 904
Santiago,
Chile
Email: jmelin@ti.com
Tel: (56-2) 321-3118
Fax: (56-2) 321-3119

COLOMBIA y otros países

Martha A. Gonzáles

Texas Instruments Incorporated E&PS
7800 Banner Drive, Mail Stop 3920
Dallas, Texas 75251
Email: mgonzales@ti.com
Tel: (972) 917-3106
Fax: (972) 917-4296

BRASIL

Daniel Storch

Texas Instruments Incorporated
Rua Azarias de Melo, 648
13090-901 Campinas – SP
Brasil
Email: d-storch@ti.com
Tel: (55-19) 3754-1175
Fax: (55-19) 3251-8321

Estimado Educador:



¿Le gustaría compartir sus experiencias del uso de la tecnología educacional de Texas Instruments en el aula? Usted puede colaborar con esta revista. Comuníquese con el representante de Texas Instruments en su país o envíe un mensaje a mgonzales@ti.com.

El comité editorial seleccionará los trabajos recibidos que serán publicados en ésta revista y/o en el área de recursos educativos de nuestra página en el Internet.

Nota: Estos trabajos se ponen a la disposición de la docencia sin costo alguno.